АКАДЕМИЯ НАУК СССР

SURPLUS DUPLICATE APR 15 1964

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ V
ВЫПУСК
4

Received
DEC 23 1960

1960

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том V *Выпуск 4*

1960

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., ***Гнеденко Б. В.***, ***Золотарев В. М.*** (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.***, ***Линник Ю. В.***, ***Прохоров Ю. В.*** (зам. главного редактора), ***Сарымсаков Т. А.***, ***Смирнов Н. В***.

СОДЕРЖАНИЕ

Боровков А. А. Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. II 377
Borovkow A. A. Limit Theorems on the Distribution of Maximum of Sums of Bounded Lattice Random Variables. II 392
Darling D. A. Sur les Théorèmes de Kolmogorov — Smirnov 393
Дарлинг Д. А. К теоремам Колмогорова — Смирнова 398
Розанов Ю. А. Спектральные свойства многомерных стационарных процессов и граничные свойства аналитических матриц 399
Rozanov Yu. A. Spectral Properties of Multivariate Stationary Processes and Boundary Properties of Analytic Matrices 414
Аров Д. З., Бобров А. А. О крайних членах вариационного ряда и их роли в сумме независимых величин 415
Arov D. Z., Bobrov A. A. The Extreme Members of Sample and Their Role in the Sum of the Independent variables 434
О работах Н. В. Смирнова по математической статистике (к шестидесятилетию со дня рождения) 436

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Дынкин Е. Б. Аддитивные функционалы от винеровского процесса, определяемые стохастическими интегралами 441
Dynkin E. B. Additive Functionals of a Wiener Process Determined by Stochastic Integrals 452
Большев Л. Н. Об оценках вероятностей 453
Bolshev L. N. On Estimates of Probabilities 457
Воробьев Н. Н. О расчлененных стратегиях 457
Vorobjev N. N. On Dismembered Strategies 459
Леонов В. П., Ширяев А. Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. II 460
Leonov V. P., Shiryaev A. N. Some Problems in the Spectral Theory of Higher-Order Moments. II 464
Студнев Ю. П. К вопросу о приближении распределений сумм неограниченно-делимыми законами 465
Studnev Yu. P. An Approximation to the Distribution of Sums by Infinitely Decomposable Laws 469
Коваленко И. Н. О предельном распределении величины первого перескока . . 469
Kovalenko I. N. On the Limit Distribution of the First Jump 472
Ермаков С. М., Золотухин В. Г. Полиномиальные приближения и метод Монте-Карло 473
Ermakov S. M., Zolotuhin V. G. Polynomial Approximations and the Monte-Carlo Method 476
Письмо в редакцию 476

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех-матем. факультет, тел. В 9-14-03

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
1960
Том V Выпуск 4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА СУММ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. II*

А. А. БОРОВКОВ

Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ $\overline{s}_n$

§ 1. Лемма

В этой главе потребуется асимптотическое выражение для интеграла

$$\Phi_n(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\rho_1}^{i\rho_1}\frac{e^{nq(z,\,\varepsilon)}}{z+\varepsilon}\,dz, \tag{1.3}$$

при $n\to\infty$ и $\varepsilon\to 0$ (n, ε и ρ_1 — вещественны). Предполагается, что функция $q(z,\varepsilon)$ для всех ε таких, что $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $\varepsilon_0=\text{const}$, аналитична по z в круге

$$|z|\leqslant\rho,\quad \rho>c\rho_1 \tag{2.3}$$

(число $c>1$ будет указано ниже) и представляется в виде $q(z,\varepsilon)=z^2(q_0(\varepsilon)+zq_1(\varepsilon)+\ldots)$, где $q_k(\varepsilon)$ $k=0,1,\ldots$ аналитичны при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, вещественны и $q_0(\varepsilon)>q_0>0$, $q_0=\text{const}$. Параметр ε можно считать или равным 0 или зависящим от n так, что при $n\to\infty$ $|\varepsilon n|\geqslant 1$. При этом под $\Phi_n(0)$ будем понимать $\int\limits_{C_{\rho_1\rho_2}}\frac{e^{nq(z,\,0)}}{z}\,dz$, где контур $C_{\rho_1\rho_2}$ получен из отрезка $[-i\rho_1,\ i\rho_1]$ заменой участка, проходящего через точку $z=0$, дугой $|\arg z-\pi|<\frac{\pi}{2}$ окружности с центром в точке $z=0$ радиуса $\rho_2<\rho_1$.

Лемма 3. *Если перечисленные условия выполнены, то при* $\varepsilon\neq 0$

$$\Phi_n(\varepsilon)=\operatorname{sign}\varepsilon\cdot e^{\varepsilon^2 nq_0(\varepsilon)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{|\varepsilon\sqrt{nq_0(\varepsilon)}|}^{\infty}e^{-t^2}dt\left(1+O\frac{|q_1(\varepsilon)|+|\varepsilon|}{\sqrt{n}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\Bigg)$$

$$\Phi_n(0)=-\frac{1}{2}+O\left(\frac{q_1(0)}{\sqrt{n}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \tag{3.3}$$

Доказательство. Положим $Q(z,\varepsilon)=\frac{q(z,\,\varepsilon)-q_0(\varepsilon)z^2}{z^3}=q_1(\varepsilon)z+q_2(\varepsilon)z^2+\ldots$, тогда

$$e^{uQ(z,\,\varepsilon)}=Q_0(u,\varepsilon)+zQ_1(u,\varepsilon)+z^2Q_2(u,\varepsilon)+\ldots,$$

где $Q_j(u,\varepsilon)$ — полиномы по u степени j. При $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ неравенства Коши

* Первая часть статьи, посвященная выводу локальных теорем для времени первого прохождения, опубликована в этом же журнале, том V, вып. 2.

позволяют записать: $|q_k(\varepsilon)| < \frac{L}{k\rho^k}$ $(k=0, 1, \ldots)$, где L — постоянная, не зависящая от k и ε. Поэтому функция $e^{uQ(z,\varepsilon)}$ имеет следующую мажоранту:

$$e^{|u|\cdot L\cdot\left(\frac{z}{\rho}+\frac{z^2}{2\rho^2}+\ldots\right)} = e^{-|u|L\ln\left(1-\frac{z}{\rho}\right)} = \left(1-\frac{z}{\rho}\right)^{-L\cdot|u|} =$$

$$=1+\frac{L\cdot|u|}{1!}\frac{z}{\rho}+\frac{L\cdot|u|(1+L|u|)}{2!}\frac{z^2}{\rho^2}+\ldots.$$

Отсюда находим $Q_j(u,\varepsilon) \leqslant \frac{L\cdot|u|(1+L\cdot|u|)\ldots((j-1)+L\cdot|u|)}{j!\,\rho^j}$ и при $k \geqslant 1$

$$\left|\sum_{j=k}^{\infty} Q_j(u,\varepsilon)\,z^j\right| \leqslant L\cdot|u|(1+L\cdot|u|)^{k-1}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^k\left(1-\frac{|z|}{\rho}\right)^{-1-L\cdot|u|}. \quad (4.3$$

Пусть $\varepsilon \neq 0$. Рассмотрим часть интеграла (1.3):

$$\Phi_n'(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{i\rho_1}\frac{e^{nq(z,\varepsilon)}}{z+\varepsilon}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{i\rho_1}\frac{e^{nz^2q_0(\varepsilon)}}{z+\varepsilon}\left(\sum_{j=0}^{\infty}Q_j(nz^2,\varepsilon)\,z^j\right)dz.$$

После замены $z = i\sqrt{\frac{t}{nq_0(\varepsilon)}}$ $\Phi_n'(\varepsilon)$ преобразуется к виду

$$\Phi_n'(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{n\rho_1^2q_0(\varepsilon)}\frac{e^{-t}\,t^{-1/2}}{i\sqrt{t}+\varepsilon\sqrt{nq_0(\varepsilon)}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}Q_j\left(-\frac{t}{q_0(\varepsilon)},\varepsilon\right)\left(i\sqrt{\frac{t}{nq_0(\varepsilon)}}\right)^j\right)dt. \quad (5.3$$

Другая часть — $\Phi_n''(\varepsilon)$ после замены $z = -i\sqrt{\frac{t}{nq_0(\varepsilon)}}$ преобразуется к виду

$$\Phi_n''(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{n\rho_1^2q_0(\varepsilon)}\frac{e^{-t}\,t^{-1/2}}{-i\sqrt{t}+\varepsilon\sqrt{nq_0(\varepsilon)}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}Q_j\left(-\frac{t}{q_0(\varepsilon)},\varepsilon\right)\left(-i\sqrt{\frac{t}{nq_0(\varepsilon)}}\right)^j\right)dt.$$

Оценим сначала величину остатка

$$R_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\rho_1}^{i\rho_1}\frac{e^{nz^2q_0(\varepsilon)}}{z+\varepsilon}\left(\sum_{j=k}^{\infty}Q_j(nz^2,\varepsilon)\,z^j\right)dz = R_k' + R_k'',$$

где R_k' и R_k'' — части R_k, соответствующие интегралам $\int_0^{i\rho_1}$, $\int_{-i\rho_1}^{0}$. В силу (4.3

$$\left|\sum_{j=k}^{\infty}Q_j\left(-\frac{t}{q_0(\varepsilon)},\varepsilon\right)\left(i\sqrt{\frac{t}{nq_0(\varepsilon)}}\right)^j\right| < L\cdot\frac{t}{q_0(\varepsilon)}\left(1+\frac{Lt}{q_0(\varepsilon)}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{t}{nq_0(\varepsilon)}}\right)^k\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{t}{nq_0(\varepsilon)}}\right)^{-1-\frac{Lt}{q_0(\varepsilon)}}.$$

Так как под знаком интеграла (5.3) $\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{t}{nq_0(\varepsilon)}} \leqslant \frac{\rho_1}{\rho}$, то

$$|R_k'| \leqslant \frac{L}{4\pi q_0(\varepsilon)} \int_0^{n\rho_1^2 q_0(\varepsilon)} \frac{e^{-t}\, t^{1/2}}{|\, i\sqrt{t} + \varepsilon\sqrt{nq_0(\varepsilon)}\,|} \left(1 + \frac{Lt}{q_0(\varepsilon)}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{t}{nq_0(\varepsilon)}}\right)^k \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right)^{-1 - \frac{Lt}{q_0(\varepsilon)}} dt = \frac{L}{4\pi q_0(\varepsilon)\, \rho^k\, (nq_0(\varepsilon))^{k/2}} \int_0^{n\rho_1^2 q_0(\varepsilon)} \frac{e^{-t}\, t^{\frac{k+1}{2}}}{|\, i\sqrt{t} + \varepsilon\sqrt{nq_0(\varepsilon)}\,|} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{L\cdot t}{q_0(\varepsilon)}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right)^{-1 - \frac{Lt}{q_0(\varepsilon)}} dt. \qquad (6.3)$$

Для $|R_k''|$ будет выполняться аналогичное неравенство. На отрезке $[0, 1]$ при $k \geqslant 1$ $\frac{t^{\frac{k+1}{2}}}{|\, i\sqrt{t} + \varepsilon\sqrt{nq_0(\varepsilon)}\,|} \leqslant 1$. С другой стороны, положив в (2.3) $c = \left(1 - e^{-\frac{q_0}{L}}\right)^{-1}$, получим, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ $e\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\frac{L}{q_0(\varepsilon)}} > 1$. Эти соотношения вместе с (6.3) дают:

$$|R_k| = O\left(\frac{1}{n^{k/2}}\right). \qquad (7.3)$$

Рассмотрим теперь интегралы

$$I_k'(\varepsilon) = \frac{i^{k-1}}{4\pi\, (nq_0(\varepsilon))^{k/2}} \int_0^{n\rho_1^2 q_0(\varepsilon)} \frac{e^{-t}\, t^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{t} - i\varepsilon\sqrt{nq_0(\varepsilon)}} Q_k\left(-\frac{t}{q_0(\varepsilon)}, \varepsilon\right) dt$$

и

$$I_k''(\varepsilon) = \frac{(-i)^{k-1}}{4\pi\, (nq_0(\varepsilon))^{k/2}} \int_0^{n\rho_1^2 q_0(\varepsilon)} \frac{e^{-t}\, t^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{t} + i\varepsilon\sqrt{nq_0(\varepsilon)}} Q_k\left(-\frac{t}{q_0(\varepsilon)}, \varepsilon\right) dt.$$

При $k=0$ находим

$$I_0'(\varepsilon) + I_0''(\varepsilon) = \frac{\varepsilon\sqrt{nq_0(\varepsilon)}}{2\pi} \int_0^{n\rho_1^2 q_0(\varepsilon)} \frac{e^{-t}}{(t + \varepsilon^2 nq_0(\varepsilon))\sqrt{t}}\, dt =$$

$$= \operatorname{sign}\frac{\varepsilon\cdot e^{\varepsilon^2 nq_0(\varepsilon)}}{\sqrt{\pi}} \int_{|\varepsilon|\sqrt{nq_0(\varepsilon)}|}^{\infty} e^{-t^2}\, dt + O\left(e^{-n\rho_1^2 q_0}\right) \qquad (8.3)$$

(см. [2] стр. 169). При $k = 1, 2$ нетрудно проверить, что

$$I_1'(\varepsilon) + I_1''(\varepsilon) = O\left(\frac{q_1(\varepsilon)}{\sqrt{n}}\right), \quad I_2'(\varepsilon) + I_2''(\varepsilon) = O\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right). \qquad (9.3)$$

Полагая в (7.3) $k=3$ и сопоставляя результат с (8.3) и (9.3), получим первое утверждение леммы. Соотношение (3.3) следует из равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1\rho_2}} \frac{e^{q_0(0)nz^2}}{z}\, dz = -\frac{1}{2}$$

и оценки

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{\rho_1\rho_2}}\frac{e^{q_0(0)nz^2}}{z}\left(\sum_{j=1}^{\infty}Q_j(nz^2,0)\,z^j\right)dz=O\left(\frac{q_1(0)}{\sqrt{n}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

содержащейся в работе [1]. Лемма доказана.

§ 2. Производящая функция

Предметом изучения в дальнейшем будет вероятность $U_{x,n}=\mathbf{P}(\overline{s}_n<x)=\mathbf{P}(\eta_{1x}>n)$. Теми же, рассуждениями, что и в § 1 главы 2, получаем, что $U_x(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_{x,n}z^n$ равномерно ограничена по x при $|z|<h$, $0<h<1$ и удовлетворяет уравнению

$$U_x(z)=1+z\sum_{j=-M}^{m}p_jU_{x-j}(z),\quad x>0$$

с начальными условиями: $U_x(z)=0$, $0\geqslant x\geqslant -m+1$. Заменой $U_x(z)=\frac{1}{1-z}+V_x(z)$ уравнение приводится к однородному с начальными условиями: $V_x(z)=-\frac{1}{1-z}$, $0\geqslant x\geqslant -m+1$. Отсюда следует, что на пересечении $\mathfrak{C}$ и круга $|z|\leqslant h$ $(0<h<1)$ существует единственное решение начальной задачи, равное

$$U_x(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{x+m-1}(z)\frac{e_j(z)}{\pi_j(z)},\quad e_j(z)=\prod_{k=1,\,k\neq j}^{m}(1-\lambda_k(z)).$$

Функция $\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j^{x+m-1}\frac{e_j(z)}{\pi_j(z)}$ является аналитической в области $\mathfrak{R}^*$. Первые ее особенности — точки ветвления $z=R\omega^k$, $k=0,1,\ldots,d-1$. Пусть Γ — замкнутый положительно ориентированный контур, лежащий в области $|z|<1$ и содержащий внутри себя точку $z=0$. Тогда

$$U_{x,n}=1-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{x+m-1}(z)}{z^{n+1}(1-z)}\frac{e_j(z)}{\pi_j(z)}\,dz. \tag{10.3}$$

Если же Γ лежит в $\mathfrak{R}^*$ и содержит внутри себя точки $z=0$ и $z=1$, то в силу формулы Коши: $(\mu_j=\lambda_j(1))$:

$$U_{x,n}=1-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^{x+m-1}\frac{E_j}{\Pi_j}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^{x+m-1}(z)}{z^{n+1}(1-z)}\frac{e_j(z)}{\pi_j(z)}\,dz. \tag{11.3}$$

Вычисление интегралов, стоящих в правых частях (10.3) и (11.3) будет проведено в §§ 3, 4, 5.

Пусть C — произвольный контур, лежащий в $\mathfrak{R}^*$ и не содержащий то-

чек $z=0$, $z=1$. Если $\lambda_j(z)$ вдоль C однозначно определена, то положим

$$I_j(x, C)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\lambda_j^{x+m-1}(z)}{z^{n+1}(1-z)}\,\frac{e_j(z)}{\pi_j(z)}\,dz.$$

В каждом из параграфов 3—5 полностью сохранены обозначения, введенные соответственно в §§ 2—4 главы 2.

§ 3. $x=o(n)$

1. Случай $a=0$. Здесь $R=1$, $\lambda_1=1$. Обозначим через $\mathfrak{R}^{**}$ область, полученную удалением из области $\mathfrak{R}^*$ внутренностей кругов $|z-R\omega^k|<\delta_1$, $\delta_1<\delta$ и через $\gamma_{\mathfrak{R}^{**}\omega^k}$ — участок границы $\Gamma_{\mathfrak{R}^{**}}$ области $\mathfrak{R}^{**}$, лежащий в секторе $|\arg z-k\theta|<\frac{\theta}{2}$. Число δ, характеризующее область $\mathfrak{R}^*$, оставим таким же, каким оно было выбрано в главе 2. Возьмем $\Gamma_{\mathfrak{R}^{**}}$ в качестве контура интегрирования в (10.3) и рассмотрим интеграл $I_1(\tau n, \gamma_{\mathfrak{R}^{**}})$. Замена (10.2) приводит его к виду

$$I_1(\tau n, \gamma_{\mathfrak{R}^{**}})=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}}\left(\frac{\psi^\tau(t)}{1-t^2}\right)^n\frac{A_1(t)}{t}\,dt,$$

где $A_1(t)=\frac{\lambda_1^{m-1}(z)e_1(z)}{z\pi_1(z)}$ и $\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}$ — образ контура $\gamma_{\mathfrak{R}^{**}}$ в плоскости t. Функции $\psi(t)$ и $\widetilde{A}_1(t)=\frac{A_1(t)-A_1(0)}{t}$ являются аналитическими вдоль $\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}$, а число δ_1 может быть выбрано так, чтобы $\psi(t)$ не имела нулей на $\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}$. Поэтому

$$I_1(\tau n, \gamma_{\mathfrak{R}^{**}})=-\frac{A_1(0)}{\pi i}\int\limits_{\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}}\frac{e^{nh(t)}}{t}\,dt-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}}\widetilde{A}_1(t)\,e^{nh(t)}\,dt \qquad (12.3)$$

(см. (13.2)). На участках γ'_1 и γ'_3 контура $\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}$ выполняется неравенство (20.2). Пользуясь аналитичностью $h(t)$ при $|t|\leqslant\sqrt{\delta}$ и произвольной малостью τ и δ_1, для первого интеграла в (12.3) получаем:

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}}\frac{e^{nh(t)}}{t}\,dt=-\frac{e^{nh(t_0)}}{\pi i}\int\limits_{-i\sqrt{\delta}+t_0}^{i\sqrt{\delta}+t_0}e^{n(h(t)-h(t_0))}\,\frac{dt}{t}+O(h^n),$$

где $h<1$. Выберем теперь в дополнение к предыдущему τ_1 и δ настолько малыми, чтобы для функции $h(u, t_0)=h(t_0+u)-h(t_0)$ при $\tau<\tau_1$ удовлетворялись все условия, наложенные на функцию $q(z, \varepsilon)$ в лемме 3. Тогда, так как $A_1(0)=1$, то

$$-\frac{A_1(0)}{\pi i}\int\limits_{\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}}\frac{e^{nh(t)}}{t}\,dt=-\frac{e^{nh(t_0)}}{\pi i}\int\limits_{-i\sqrt{\delta}}^{i\sqrt{\delta}}e^{nh(u,\,t_0)}\,\frac{du}{u+t_0}+O(h^n)=$$

$$=\frac{2e^{t_0^2nh_0+nh(t_0)}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{|t_0\sqrt{nh_0}|}^{\infty}e^{-t^2}\,dt\left(1+O\left(\frac{t_0}{\sqrt{n}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)\right)$$

(см. (16.2), (21.2)). Второй интеграл в (12.3) находится обычным путем ($e_j = e_j(R)$):

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_{\mathfrak{R}^{**}}} \widetilde{A}_1(t)\, e^{nh(t)}\, dt = -\frac{\widetilde{A}_1(t_0)\, e^{nh(t_0)}}{\sqrt{\pi n h_0}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1^{m-1}}{\pi_1}\right)\frac{e_1\psi_1 e^{nh(t_0)}}{\sqrt{\pi n}}\left(1+O(\tau)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом, считая как и прежде $H(\tau)=h(t_0)$ и полагая, кроме того,

$$\widetilde{H}(\tau)=t_0^2 h_0+h(t_0), \quad t(\tau)=-t_0\sqrt{h_0}, \tag{13.3}$$

находим:

$$I_1(\tau n,\gamma_{\mathfrak{R}^{**}}) = \frac{2e^{n\widetilde{H}(\tau)}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t(\tau)\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\left(1+O\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1^{m-1}}{\pi_1}\right)\frac{e_1\psi_1 e^{nH(\tau)}}{\sqrt{\pi n}}\left(1+O(\tau)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{14.3}$$

где разложения функций (13.3) удовлетворяют соотношениям:

$$\widetilde{H}(\tau) = -\sum_{k=3}^{\infty}\frac{h^{(k)}(t_0)}{k!}\,t_0^k = O(\tau^4),$$

$$t(\tau) = \frac{\psi_1}{2}\,\tau - \frac{\psi_1}{8}\,(2\psi_2 - \psi_1^2)\,\tau^2 + \ldots$$

Положив в (14.3) $\tau = \frac{x}{n}$, получим значение $I_1(x, \gamma_{\mathfrak{R}^{**}})$.

2. Вычислим далее интегралы

$$I_j(x,\gamma_{\mathfrak{R}^{**}}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\mathfrak{R}^{**}}} \frac{\lambda_j^{x+m-1}(z)}{z^{n+1}(1-z)}\,\frac{e_j(z)}{\pi_j z}\,dz \quad \text{при } j\geqslant 2.$$

Пусть x не зависит от n. После замены (10.2) получим:

$$I_j(x,\gamma_{\mathfrak{R}^{**}}) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}} \frac{A_j(t)\,dt}{t(1-t^2)^{n+1}}.$$

Функция $A_j(t) = \frac{\lambda_j^{x+m-1}(z)\, e_j(z)}{\pi_j(z)}$ $(2\leqslant j\leqslant m)$ аналитичная вдоль $\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}$ и при $t\to 0$ стремится к 0 как $\left(\frac{dA_j(t)}{dt}\right)_{t=0} t$. Поэтому

$$I_j(x,\gamma_{\mathfrak{R}^{**}}) = -\frac{1}{\pi i}\left(\frac{dA_j(t)}{dt}\right)_{t=0}\int\limits_{\gamma'_{\mathfrak{R}^{**}}}\frac{dt}{(1-t^2)^{n+1}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\lambda_j^{x+m-1}\psi_1\,\frac{\partial e_j}{\partial\lambda_1}}{\sqrt{\pi n}\,\pi_j}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{15.3}$$

Если $x \to \infty$ при $n \to \infty$, то оценка $I_j(x, \gamma_{\mathfrak{R}^{**}})$ дает:

$$|I_j(x, \gamma_{\mathfrak{R}^{**}})| = O\left(\frac{|\lambda_2|^x}{\sqrt{n}}\right). \tag{16.3}$$

3. Чтобы закончить вычисление (10.3), остается оценить интегралы $I_j(x, \gamma_{\mathfrak{R}^{**}\omega^k})$ при $k = 1, 2, \ldots, d-1$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим, например, $I_j(x, \gamma_{\mathfrak{R}^{**}\omega}) = I_j(x, \gamma_{\mathfrak{R}^{*}\omega})$. Пусть при движении от точки $z = R$ к точке $z = R\omega$ по контуру $\Gamma_{\mathfrak{R}^*}$ в положительном направлении функция $\lambda_j(z)$ на пересечении окрестности точки $R\omega$ с областью R^* совпадает с $\omega^m \lambda_{j_1}(z\omega^{-1})$, $1 \leqslant j_1 \leqslant m$. Тогда, если положить $z\omega^{-1} = u$, получим

$$I_j(x, \gamma_{\mathfrak{R}^{*}\omega}) = \frac{\omega^{mx-n}}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{R}^*}} \frac{\lambda_{j_1}^{x+m-1}(u)}{(1-\omega u)\, u^{n+1}} \frac{\prod\limits_{k=1, k\neq j_1}^{m} (1-\omega^m \lambda_k(u))}{\pi_{j_1}(u)}\, du. \tag{17.3}$$

Вычисления § 2 главы 2 показывают, что при $j_1 = 1$ (см. (30.2)) $I_j(x, \gamma_{\mathfrak{R}^{*}\omega}) = O\left(\frac{x}{n^{3/2}} e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}\right)$ и при $j_1 \neq 1$

$$I_j(x, \gamma_{\mathfrak{R}^{*}\omega}) = O\left(\frac{|\lambda_2|^x}{n^{3/2}}\right). \tag{18.3}$$

4. Суммирование формул (14.3)—(16.3), (18.3) дает возможность найти асимптотическое выражение для $u_{x,n}$ при любом x, $x = o(n)$. Пусть x не зависит от n, тогда в силу (10.3)

$$U_{x,n} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{t\left(\frac{x}{n}\right)\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt + \sum_{j=2}^{m} \frac{\psi_1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\lambda_j^{x+m-1}}{\pi_j} \frac{\partial e_j}{\partial \lambda_1} +$$

$$+ \frac{\psi_1 e_1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{\lambda_1^{m-1}}{\pi_1}\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Так как $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{t\left(\frac{x}{n}\right)\sqrt{n}} \exp(-t^2)\, dt = \frac{\psi_1 x}{\sqrt{\pi n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ и $\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{\omega''(1)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$,

то

$$U_{x,n} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi n}} \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j^{x+m-1} e_j}{\pi_j}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{19.3}$$

При $x \to \infty$ и $x = O(\sqrt{n})$:

$$U_{x,n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{\sigma\sqrt{2n}} + O\left(\frac{x^2}{n^{3/2}}\right)} e^{-t^2}\, dt + O\left(\frac{x}{n^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{x}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\left(1 + O\left(\frac{x^2}{n}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right). \tag{20.3}$$

Здесь, при медленно растущем x, $O\left(\frac{1}{x}\right)$ можно заменить выражением (см. (14.3)) $-\frac{1}{x}\sum_{j=2}^{m}\left(\frac{\lambda_j}{1-\lambda_j}\right)+O\left(\frac{|\lambda_2|^x}{\sqrt{n}}\right)$. Формулы (19.3), (20.3) описывают малые уклонения $\overline{s}_n$.

При $x\to\infty$ и $x=o(n^{2/3})$ значение $U_{x,n}$ дается главным членом в (14.3) и приведено ниже (см. теорему). Наконец, при $\frac{x}{\sqrt{n}}\to\infty$ и $x=o(n)$, пользуясь разложением $\int_z^\infty e^{-t^2}\,dt$ около точки $z=\infty$, найдем

$$1-U_{x,n}=\frac{e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)-nt^2\left(\frac{x}{n}\right)}}{t\left(\frac{x}{n}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1+O\left(\frac{n}{x^2}\right)\right)+O\left(\frac{e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{x\sqrt{\pi}}e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}\left(1+O\left(\frac{n}{x^2}\right)+O\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

5. Как видно из предыдущего, асимптотическое разложение по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$ при $x\sim c\sqrt{n}$, $c=\text{const}$ будут определять интегралы (12.3) и (17.3) при $j_1=1$. Разложение интеграла (17.3) не содержит члена порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Коэффициент при $\frac{1}{\sqrt{n}}$ в первом интеграле в (12.3) зависит только от трех первых моментов ξ_k, во втором — кроме того — от первой производной функции $A_1(t)$ или, что то же, от значения первой производной по λ_1 в точке $\lambda_1=1$ функции $\lambda_1^{m-1}\frac{e_1}{\pi_1}$ равной $\lim_{x\to\infty}\mathbf{M}\ \chi_x$ (см. п. 2 § 5 главы 2)*.

Коэффициент при $1/n$ будет зависеть от четырех моментов ξ_k и двух предельных моментов χ_x. Однако в дальнейшем это простое правило не сохраняется. Коэффициент при $n^{-j/2}$, $j>2$ помимо $j+2$ моментов ξ_k и j предельных моментов χ_x будет зависеть также от производных условных моментов $\lim_{x\to\infty}\mathbf{M}\,(\chi_x^k|x\sim\alpha\eta_{|x})$, $k\leqslant j$ по α в точке $\alpha=0$.

6. Случай $a\neq 0$. Здесь $R>1$ и в интеграле (11.3), контур $\Gamma_{\mathfrak{R}^*}$ не будет иметь вблизи себя других особых точек подынтегральной функции, кроме точек ветвления. Это обстоятельство позволяет проводить интегрирование (11.3), не выходя за пределы приемов § 2 главы 2.

При $a>0$ имеем $\mu_1=1$, $\sum_{j=1}^{m}\mu_j^{x+m-1}\frac{E_j}{\Pi_j}=1$. Формула (11.3) дает:

---

* При определении участвующих в образовании этой производной функции $W_1(\lambda,z)$ и $W_2(\lambda,z)$ в конце главы 1, (равенство (13.1)) допущена ошибка. Следует положить $W_1(\lambda,z)=\prod_{j=2}^{m}(1-\lambda\lambda_j(z))$, $W_2(\lambda,z)=\prod_{j=2}^{M}(1-\lambda\Lambda_j(z))$. В соответствии с этим в сноске на стр. 168 следует читать: $-\sum_{j=2}^{m}\frac{\mu_j}{1-\mu}=\mathbf{M}\chi_x+O(|\mu_2|^x)$;

$$\mathbf{M}\eta_x=\frac{x+\mathbf{M}\chi_x}{a}+O(|\mu_2|^x).$$

$$U_{x,n} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\mathfrak{R}^*}} \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j^{x+m-1}(z)}{z^{n+1}(1-z)} \frac{e_j(z)}{\pi_j(z)}\, dz.$$

Разрежем контур $\Gamma_{\mathfrak{R}^*}$ на пересечении его с лучом $\arg z = -\frac{\theta}{2}$. Тогда функции $\lambda_j(z)$ при непрерывном продолжении их вдоль $\Gamma_{\mathfrak{R}^*}$ в положительном направлении однозначно определены. Формула (17.3) показывает, что

$$\sum_{j=1}^{m} I_j(x, \gamma_{\mathfrak{R}^*}\omega^k) = \frac{\omega^{k(m_x-n)}}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_{\mathfrak{R}^*}} \frac{\lambda_j^{x+m-1}(z)}{z^{n+1}(1-\omega^k z)} \frac{\prod\limits_{l=1,\, l\neq j}^{m} (1-\omega^{km}\lambda_l(z))}{\pi j(z)}\, dz. \quad (21.3)$$

Пусть x не зависит от n. Используя ответ относительно (21.3), содержащийся в § 2 главы 2 и производя суммирование по k, получим:

$$U_{x,n} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi w''(\lambda_1)}\, n^{3/2} R^{n+1/2}} \left\{ \sum_{k=0}^{d-1} \frac{\omega^{k(m_x-n)}}{1-\omega^k R} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial}{\partial\lambda_1} \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{x+m-1} \frac{\prod\limits_{l=1,\, l\neq j}^{m} (1-\omega^{km}\lambda_l)}{\pi_j} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \quad (22.3)$$

При любом z ($|z| \leqslant R$, $|z| \neq 1$),

$$\sum_{k=0}^{d-1} \frac{\omega^{k(m_x-n)}}{1-\omega^k z} \prod_{l=1,\, l\neq j}^{m} (1-\omega^{km}\lambda_l(z)) = \frac{d}{1-z^d} \sum_{y=0}^{m-1} (-1)^{y\sigma_j^y}(z)\, z^{\mathfrak{b}(n\ m(x+y))} \quad (23.3)$$

($\mathfrak{b}(l)$ — вычет $l \pmod d$). Поэтому (22.3) может быть преобразовано к виду

$$U_{x,u} = \frac{d}{\sqrt{2\pi w''(\lambda_1)}\, n^{3/2} R^{n+1/2}(R^d-1)} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\lambda_1} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j^{x+m-1}}{\pi_j} \sum_{y=0}^{m-1} (-1)^{y\sigma_j^{(y)}} R^{\mathfrak{b}(n-m(x+y))} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Если $x \to \infty$ вместе с n, то аналогичным образом найдем:

$$U_{x,n} = \frac{de^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}}{\sqrt{2\pi w''(\lambda_1)}\, n^{3/2} R^{n+1/2}(R^d-1)} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\lambda_1} \left(\frac{\lambda_1^{x+m-1}}{\pi_1} \sum_{y=0}^{m-1} (-1)^{y\sigma_1^{(y)}} R^{\mathfrak{b}(n-m(x+y))} \right) \left(1 + O\left(\frac{x}{n}\right) + O(h^x)\right),\ h < 1.$$

7. При $a < 0$ $\mu_1 < 1$. В силу только что полученных формул и (11.3) находим:

$$1 - U_{x,n} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j^{x+m-1} \frac{E_j}{\Pi_j} + O\left(\frac{x\lambda_1^x e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}}{n^{3/2} R^n} \right).$$

Результатом настоящего параграфа является

Теорема 4. *В обозначениях теоремы 1 выполняется:*

А. *При* $a = 0$

$$\mathbf{P}(\overline{s}_n < x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi n}} \dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\lambda_j^{x+m-1} e_j}{\pi_j}\right) + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right) & x \text{ не зависит от } n \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-t^2/2} dt \left(1 + O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & x \to \infty \text{ и } x = o(\sqrt{n}) \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(\overline{s}_n \geqslant x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \left(1 + O\left(\dfrac{x^3}{n^2}\right)\right) & \dfrac{\sqrt{n}}{x} = O(1) \text{ и } x = O(n^{3/2}) \\ \dfrac{\sigma\sqrt{2n}}{x\sqrt{\pi}} e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)} \left(1 + O\left(\dfrac{n}{x^2}\right) + O\left(\dfrac{x}{n}\right)\right) & \dfrac{x}{\sqrt{n}} \to \infty \text{ и } x = o(n) \end{cases}$$

В. *При* $a > 0$

$$\mathbf{P}(\overline{s}_n < x) = \frac{de^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}}{\sqrt{2\pi w''(\lambda_1)}\, n^{3/2} R^{n+1/2} (R^d - 1)} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j^{x+m-1}}{\pi_j} \sum_{y=0}^{m-1} (-1)^{y\sigma_j(y)} R^{b(n-m(x+n))}\right\}\left(1 + O\left(\frac{x}{n}\right)\right)$$

С. *При* $a < 0$

$$\mathbf{P}(\overline{s}_n \geqslant x) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j^{x+m-1} \frac{E_j}{\Pi_j} + O\left(\frac{x\lambda_1^x e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}}{n^{3/2} R^n}\right).$$

Здесь μ_j, E_j, Π_j — *числа, определенные в* § 5 *главы* 2.

В пункте В теоремы при $d = 1$ $\sum\limits_{y=0}^{m-1} (-1)^{y\sigma_j(y)} = e_j = \prod\limits_{k=1, k\neq j}^{m} (1 - \lambda_k)$. В пункте А при $x \sim c\sqrt{n}$, $c = \text{const}$ асимптотическое разложение по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$ имеет коэффициенты при $n^{-j/2}$, зависящие только от первых $j+2$ моментов ξ_k и от первых j моментов предельного распределения величины первого перескока.

§ 4. $x \sim \alpha n$, $0 < \alpha < n$.

1. Пусть как и прежде $\lambda(\alpha)$ — точка, в которой достигается минимум функции $w(\lambda, \alpha) = \lambda^{\alpha} w(\lambda)$ на полуоси $\lambda > 0$, и $\mu_1 = \lambda_1(1)$.

Лемма 4. *Между значениями* $r_{\alpha} = \frac{1}{w(\lambda(\alpha))}$ *и* α *выполняются соотношения* (при $-\mu_1 w'(\mu_1) = a \geqslant 0$):

$$\begin{aligned} r_{\alpha} &= 1, \quad \text{если} \quad \alpha = -\mu_1 w'(\mu_1), \\ r_{\alpha} &< 1, \quad \text{если} \quad \alpha > -\mu_1 w'(\mu_1), \\ r_{\alpha} &> 1, \quad \text{если} \quad \alpha < -\mu_1 w'(\mu_1). \end{aligned}$$

Доказательство. При $\alpha = -\mu_1 w'(\mu_1)$, μ_1 удовлетворяет уравнению $w'_\lambda(\lambda, \alpha) = 0$. Откуда $\lambda(\alpha) = \mu_1$ и $r_\alpha = 1$. Обратно, если $r_\alpha = 1$, то $\alpha = -\mu_1 w'(\mu_1)$. Это следует из того, что всегда

$$\lambda(\alpha) < \Lambda_1(1) \tag{24.3}$$

— наибольшего положительного корня уравнения $w(\lambda) - 1 = 0$. Когда $a \leqslant 0$ или $\alpha \geqslant a$ при $a > 0$, (24.3) очевидно. Если же $\alpha > 0$ и $\alpha < a$, то (24.3) следует из неравенства $\Lambda(\alpha) < \Lambda_1(1)$, где $\Lambda(\alpha)$ — наибольший положительный корень уравнения $w(\lambda, \alpha) - 1 = 0$. Последнее неравенство имеет место, так как $\Lambda(0) = \Lambda_1(1)$ и при указанных значениях a и α $\frac{d\Lambda(\alpha)}{d\alpha} = -\frac{\ln \Lambda(\alpha)}{w'_\lambda(\Lambda(\alpha), \alpha)} < 0$. Остается заметить, что r_α является непрерывной функцией α, и проверить утверждение леммы для крайних значений α.

2. $\alpha = -\mu_1 w'(\mu_1)$. Здесь $\lambda(\alpha) = \mu_1$ и $r_\alpha = 1$. В силу (39.2) для точки перевала функции $g(z) = \frac{\lambda_1^\tau(z)}{z}$, $\tau = \alpha + \varepsilon$ имеем:

$$z_0 = 1 + \frac{w'(\mu_1) w_\alpha}{\mu_1 w''_\lambda(\mu_1, \alpha)} \varepsilon + \ldots,$$

где всегда $\frac{w'(\mu_1) w_\alpha}{\mu_1 w''_\lambda(\mu_1, \alpha)} < 0$. Поэтому, если принять в качестве Γ в (10.3), (11.3) контур Γ_{z_0}, то значение $U_{x,n}$ будет даваться формулой (10.3) при $\varepsilon > 0$ и формулой (11.3) при $\varepsilon < 0$. При $\varepsilon = 0$ в (10.3) следует взять несколько измененный контур — Γ в котором точка $z_0 = 1$ обходится по дуге $|\arg(1 - z)| < \frac{\pi}{2}$ окружности произвольного малого радиуса с центром в точке $z_0 = 1$. Вычислим

$$I_1(\tau n, \gamma_{z_0}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{z_0}} \frac{\lambda_1^{\tau n}(z)}{z^n (1 - z)} B(z)\, dz,$$

где $B(z) = \frac{\lambda^{m-1}(z) e_1(z_0)}{z\pi_1(z)}$ и $\varepsilon \neq 0$. Как и в § 3 главы 2 можно считать, что $g(z)$ и $B(z)$ аналитичны вдоль всего пути γ_{z_0}. Представим $B(z)$ в виде $B(z) = B(1) + (1 - z)\widetilde{B}(z)$. Ясно, что для $\widetilde{B}(z)$ сохраняется область аналитичности функции $B(z)$. Имеем:

$$I_1(\tau n, \gamma_{z_0}) = \frac{B(1)}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{z_0}} \frac{g^n(z)}{1 - z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{z_0}} g^n(z) \widetilde{B}(z)\, dz. \tag{25.3}$$

Второй интеграл может быть вычислен обычным образом. Нам понадобится лишь его оценка $-O\left(\frac{\mu_1^{\tau n} e^{nH_\alpha(\varepsilon)}}{\sqrt{n}}\right)$ (см., например, (42.2)).

Положим $u = z - z_0$ и $u_0 = z_0 - 1$. Функция $g(u, u_0) = \ln \frac{g(z)}{g(z_0)}$ в окрестности точки $u = 0$ является аналитической по u и представима в виде

ряда

$$g(u, u_0) = g_0(u_0)\,u^2 + g_1(u_0)\,u^3 + \dots,$$

где коэффициенты при степенях u — аналитические функции ε и, следовательно, u_0. В частности,

$$g_0(u_0) = \frac{g''(z_0)}{2g(z_0)} = \frac{w''_\lambda(\mu_1, \alpha)}{2[w'(\mu_1)]^2 w_\alpha} + O(u_0).$$

Далее (см. (36. 2)), всегда может быть выбрана такая δ — окрестность точки $z = z_0$, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0}} \frac{g^n(z)}{1-z}\,dz = -\frac{g^n(z_0)}{2\pi i}\int_{-i\delta}^{i\delta} \frac{e^{g(u, u_0)n}}{u+u_0}\,du + O(h^n), \quad h < 1.$$

$\tilde{u}_0 > 0$ и δ фиксируем настолько малыми, чтобы при $|u_0| < \tilde{u}_0$ функция $g(u, u_0)$ удовлетворяла всем условиям, наложенным на функцию $q(z, \varepsilon)$ в лемме 3. Эта лемма вместе с равенством (25.3) дают тогда:

$$I_1(\tau n, \gamma_{z_0}) = -\frac{B(1)\,e^{nH_\alpha(\varepsilon)}\mu_1^{\tau n}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sign} u_0 e^{nu_0^2 g_0(u_0)} \times$$

$$\times \int_{|u_0|\sqrt{ng_0(u_0)}|}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + O\left(\frac{\mu_1^{\tau n} e^{nH_\alpha(n)}}{\sqrt{n}}\right). \tag{26.3}$$

При $\varepsilon = 0$ аналогично найдем $\left(\gamma_1^*$ — часть Γ_1^* при $|\arg z| < \frac{\theta}{2}\right)$:

$$I_1(\tau n, \gamma_1^*) = \frac{B(1)\,\mu_1^{\tau n}}{2\sqrt{\pi}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{27.3}$$

Остальные интегралы в (10.3), (11.3) подлежат оценке. Подынтегральные функции в $I_j(\tau n, \gamma_{z_0})$ $j = 2, \dots, m$ не имеют при $z = 1$ полюсов, так как $e_j(1) = 0$, $j = 2, \dots, m$. Поэтому $|I_j(\tau n, \gamma_{z_0})| = O(|\mu_2|^{\tau n})$. Далее, при $k \geqslant 1$

$$I_j(\tau n, \gamma_{z_0}\omega^k) = \frac{\omega^{k(m_{x-n})}}{2\pi i}\int_{z_0} \frac{\lambda_{j_k}^{-n+m-1}}{u^{n+1}(1-\omega^k u)} \frac{\prod_{l=1,\, l\neq j_k}^{m}(1-\omega^{km}\lambda_l(u))}{\pi_{j_k}(u)}\,du,$$

где j_k определяется аналогично числу j_1 в (17.3). Если $j_k \neq 1$, то последний интеграл есть $O(|\mu_2|^{\tau n})$, если $j_k = 1$, то $= O\left(\frac{\mu_1^{\tau n} e^{nH_\alpha(\varepsilon)}}{\sqrt{n}}\right)$. Эти факты непосредственно следуют из оценок и вычислений главы 2. В итоге, полагая $\tau = \frac{x}{n}$, $\varepsilon = \frac{x}{n} - \alpha$, получим, что при $\varepsilon \geqslant 0$ (см. (10.3) и (26.3), (27.3)).

$$1-U_{x,n}=\frac{B(1)\,\mu_1^x e^{n(H_\alpha(\varepsilon)+u_0^2 g_0(u_0))}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{|u_0\sqrt{2g_0(u_0)n}|}^{\infty}e^{-t^2/2}dt\left(1+O(\varepsilon)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{28.3}$$

и при $\varepsilon<0$

$$U_{x,n}=1-\mu_1^{x+m-1}\frac{E_1}{\Pi_1}+$$

$$+\frac{B(1)\,\mu_1^x e^{n(H_\alpha(\varepsilon)+u_0^2 g_0(u_0))}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{|u\sqrt{2g_0(u_0)n}|}^{\infty}e^{-t^2/2}dt\left(1+O(\varepsilon)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{29.3}$$

Заметим теперь, что

$$H_\alpha(\varepsilon)+u_0^2 g_0(u_0)=\ln g(z_0)+(z_0-1)^2\frac{g''(z_0)}{2g(z_0)}-\ln g(1)=$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}(z_0-1)^k\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!\,g(z_0)}=O(\varepsilon^3)$$

и обозначим $\sigma(\mu_1)=\mu_1\sqrt{\frac{w_\lambda''(\mu_1,\alpha)}{w_\alpha}}$ так, что $\sigma(1)=\sigma$ и $|u_0\sqrt{2g_0(u_0)}|=$ $=\frac{\varepsilon}{\sigma(\mu_1)}+O(\varepsilon^2)$. Так как $B(1)=\mu_1^{m-1}\frac{E_1}{\Pi_1}$, то при $\varepsilon^3 n=o(1)$ формулы (28.3), (29.3) преобразуются в следующие. Для $\varepsilon\geqslant 0$ и $\varepsilon<0$ соответственно:

$$1-U_{x,n}=\frac{\mu_1^{x+m-1}E_1}{\sqrt{2\pi}\Pi_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma(\mu_1)}}^{\infty}e^{-t^2/2}dt\left(1+O(\varepsilon^3 n)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \tag{30.3}$$

$$U_{x,n}=1-\frac{\mu_1^{x+m-1}E_1}{\Pi_1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma(\mu_1)}}^{\infty}e^{-t^2/2}dt\left(1+O(\varepsilon^3 n)+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$$

При $\varepsilon^2 n\to\infty$ (28.3), (29.3) дают для $\varepsilon>0$ и $\varepsilon<0$ соответственно

$$1-U_{x,n}=\frac{\mu_1^{x+m-1}e^{nH_\alpha(\varepsilon)}\sigma(\mu_1)E_1}{\sqrt{2\pi n}\varepsilon\Pi_1}\left(1+O(\varepsilon)+O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 n}\right)\right)$$

$$U_{x,n}=1-\frac{\mu_1^{x+m-1}E_1}{\Pi_1}\left(1-\frac{e^{nH_\alpha(\varepsilon)}\sigma(\mu_1)}{\sqrt{2\pi n}\,|\,\varepsilon\,|}\left(1+O(\varepsilon)+O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 n}\right)\right)\right). \tag{31.3}$$

3. $\alpha\neq-\mu_1 w'(\mu_1)$. Интегрирование слагаемых в (10.3), (11.3) при $\Gamma=\Gamma_{z_0}$ в этом случае не содержит ничего нового. Поэтому ниже сразу будут выписываться результаты со ссылками на те места работы, где подобные интегралы были рассмотрены. Пусть сначала $\alpha>-\mu_1 w'(\mu_1)$ и, значит, $r_\alpha<1$. В силу соотношений, аналогичных (21.3), имеем:

$$\sum_{j=1}^{m}I_j(x,\Gamma_{z_0})=(1+O(h^x))\sum_{k=0}^{d-1}\frac{\omega^{k(m_{x-n})}}{2\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_{\gamma_{r_0}}\frac{\lambda_1^{x+m-1}(u)}{u^{n+1}(1-\omega^k u)}\,\frac{\prod\limits_{l=2}^{m}(1-\omega^{km}\lambda_l(u))}{\pi_1(u)}\,du,\quad h<1.$$

Откуда, учитывая (42.2), (10.3), (23.3) и принимая опять $\varepsilon = \frac{x}{n} - \alpha$, получим

$$1 - U_{x,n} = \frac{d \mid w'(\lambda(\alpha)) \mid w_\alpha^{n+1/2} \lambda^{\varepsilon n+m-1}(\alpha)\, e^{nH_\alpha(\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi n w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}\,(1 - r_\alpha^d)\,\pi_1(r_\alpha)} \times$$
$$\times \sum_{y=0}^{m-1} (-1)^y \sigma_1^{(y)}(r_\alpha)\, r_\alpha^{b(n-m(x+y))} \left(1 + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{32.3}$$

При $\alpha < -\mu_1 w'(\mu_1)$ $1 - U_{x,n}$ задается таким же выражением с добавлением слагаемого $\mu_1^{x+m-1} E_1/\Pi_1$. При этом, по определению числа $\lambda(\alpha)$ всегда $\mu_1^\alpha = w(\mu_1, \alpha) > w(\lambda(\alpha), \alpha) = w_\alpha$.

Из равенств (30.3) — (32.3) следует

Теорема 5. *Пусть* $\frac{x}{n} \sim \alpha$, $0 < x < m$ *и* $\varepsilon = \frac{x}{n} - \alpha$. *В обозначениях теорем 2, 4 выполняется:*

A. $\alpha = a > 0$. *Если* $\varepsilon^2 n \to \infty$, *то*

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{P}(\bar{s}_n < x) \text{ при } \varepsilon < 0 \\ \\ \mathbf{P}(\bar{s}_n \geqslant x) \text{ при } \varepsilon > 0 \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma e^{nH_\alpha(\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi n}\mid \varepsilon \mid}\left(1 + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 n}\right)\right), \tag{33.3}$$

и если $\varepsilon^3 n = o(1)$, *то*

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{P}(\bar{s}_n < x) \text{ при } \varepsilon \leqslant 0 \\ \\ \mathbf{P}(\bar{s}_n > x) \text{ при } \varepsilon > 0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mid \varepsilon \mid \sqrt{n}/\sigma}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \left(1 + O(\varepsilon^3 n) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right);$$

B. $\alpha = -\mu_1 w'(\mu_1)$, $a < 0$. *Здесь при* $\varepsilon < 0$, $\varepsilon^2 n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\bar{s}_n \geqslant x) = \mu_1^{x+m-1} \frac{E_1}{\Pi_1}\left(1 + O\left(\frac{e^{nH_\alpha(\varepsilon)}}{\sqrt{n}}\right)\right);$$

при $\varepsilon \sqrt{n}$, *ограниченном снизу, и* $\varepsilon^3 n = o(1)$

$$\mathbf{P}(\bar{s}_n \geqslant x) = \frac{\mu_1^{x+m-1} E_1}{\sqrt{2\pi}\,\Pi_1} \int_{\varepsilon \sqrt{n}/\sigma(\mu_1)}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \left(1 + O(\varepsilon^3 n) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right);$$

при $\varepsilon > 0$, $\varepsilon^2 n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\bar{s}_n \geqslant x) = \frac{\mu_1^{x+m-1} e^{nH_\alpha(\varepsilon)} \sigma(\mu_1) E_1}{\sqrt{2\pi n}\,\varepsilon \Pi_1},$$

где $\sigma(\mu_1) = \mu_1^{1-\alpha/2} \sqrt{w''_\lambda(\mu_1, \alpha)}$.

C. $\alpha \neq -\mu_1 w'(\mu_1)$.

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{P}(\bar{s}_n < x) \text{ при } \alpha < a,\ a \geqslant 0 \\ \mathbf{P}(\bar{s}_n \geqslant x) \text{ при } \alpha > -\mu_1 w'(\mu_1)\end{matrix}\right\} = \frac{d\,|\,w'_\lambda(\alpha)\,|\,w_\alpha^{n+1/2}\lambda^{\varepsilon n+m+1}(\alpha)\,e^{nH_\alpha(\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi n w''_\lambda(\lambda(\alpha),\alpha)}\,|\,1-r_\alpha^d\,|\,\pi_1(r_\alpha)} \times$$

$$\times \sum_{y=0}^{m-1} (-1)^y \sigma_1^{(y)}(r_\alpha)\, r_\alpha^{b(n-m(x+y))}\left(1 + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Здесь $r_\alpha = \frac{1}{w(\lambda(\alpha))}$. *При* $\alpha < -\mu_1 w'(\mu_1)$, $a < 0$

$$\mathbf{P}(\bar{s}_n \geqslant x) = \mu_1^{x+m-1} \frac{E_1}{\Pi_1}(1 + O(h^x)), \quad h < 1.$$

В пунктах B и C теоремы при $d = 1 \sum_{y=0}^{m-1} (-1)^y \sigma_1^{(y)}(r_\alpha) = e_1(r_\alpha)$. Относительно коэффициентов асимптотического разложения в случае, когда $\frac{x - an}{\sqrt{n}} \sim c$, $c = \text{cosnt}$ (п. A теоремы) остается справедливым замечание к теореме 4.

§ 5. $x \sim mn$

Рассмотрим сначала случай, когда $mn - x = X$ не зависит от n. Пусть $\mathcal{A}$ — обозначает событие $\{s_n \geqslant x\}$ и $\mathcal{B}$ — событие $\{k$ *скачков среди* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *не равны* $m\}$. Произведение $\mathcal{A}\mathcal{B}_k$, очевидно, пусто, если только $k > l$, где

$$l = \begin{cases} \left[\frac{X}{b_1 d}\right] & \text{при } b_1 d \leqslant m, \\ \left[\frac{X}{m}\right] & \text{при } b_1 d \geqslant m. \end{cases}$$

Обозначим через L максимальное количество скачков, не равных m, содержащееся в траектории длины n такое, что событие $\mathcal{A}$ будет происходить при любой перестановке этих скачков вдоль всей траектории. Тогда имеем:

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{l} \mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_k) = \mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_1)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}_L) = p_m^{n-L} \frac{n!}{(n-L)!} \sum \prod_{j=0} \frac{p_{m-(b_1+j)d}^{n_j}}{n_j!}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Суммирование ведется по совокупности чисел $\{n_j\} = K$ таких, что $\sum_{j=0} n_j = L$, $\sum_{j=0} n_j (m - (b_1 + j)d) \geqslant Lm - X$.

Так как $L = \left[\frac{X}{b_1 d}\right]$, то нами доказана

Теорема 6а. *Если* $X \to 0$ *не зависит от* n, *то*

$$\mathbf{P}(\bar{s}_n \geqslant mn - X) = p_m^{n-L} n^L \sum \prod_{K\, j=0} \frac{p_{m-(b_1+j)d}^{n_j}}{n_j!}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \text{ где } L = \left[\frac{X}{b_1 d}\right].$$

Пусть теперь $mn - x \to \infty$ вместе с n. В качестве контура интегрирования в (10.3) выберем окружность Γ произвольно малого радиуса. (В соответствии с леммой 4 здесь всегда $m > -\mu_1 w'(\mu_1)$. Это следует из того, что при любом положительном λ $w'_\lambda(\lambda, m) > 0$.) Если γ, как обычно, часть Γ, для которой $|\arg z| < \frac{0}{2}$, то в силу (23.3) подсчет такого рода

интегралов содержится в § 4 главы 2. Надо лишь при рассмотрении интеграла, соответствующего (49.2) функцию $c_1(t)$ заменить на

$$C_1(t) = (-1)^y \Psi^y t^{y-1+\mathfrak{b}(mn-x-y)}(1+O(t^{b_1 d})).$$

При этом множитель $\left(\frac{b_1 d p_{m-b_1 d}}{\varepsilon p_m}\right)^{-\frac{y}{b_1 d}} m(n, \varepsilon, y, d, b_1, \ldots, b_s)$ в формулах (63.2) заменится множителем

$$M = M(n, \varepsilon, d, b_1, \ldots, b_s) = \sum_{y=0}^{m-1} p_m^{-\mathfrak{b}(n-m(x+y))} \left(\frac{\varepsilon p_m}{b_1 d p_{m-b_1 d}}\right)^{\frac{y+\mathfrak{b}(mn-x-v)}{b_1 d}} m.$$

Величина последнего чаще всего будет определяться значением $\min\limits_{0 \leqslant y \leqslant m-1} (y + \mathfrak{b}(mn - x - y))$. В силу (10.3) справедлива

Теорема 66. *В условиях теоремы 3 выполняется:*

$$\mathbf{P}(\overline{s}_n \geqslant x) = \frac{\sqrt{d}\, p_m^n \left(\frac{b_1 d p_{m-b_1 d}}{\varepsilon p_m}\right)^{\frac{\varepsilon n}{b_1 d}} F^n(\varepsilon)}{\sqrt{2\pi \varepsilon n b_1}} \left\{ M + O(\varepsilon^{1/b_1}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon n}}\right)\right\}.$$

Смысл всех обозначений и замечания к теореме 3 здесь сохраняются.

Поступила в редакцию
15.7.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Perron, Über die naherungsweise Berechnung von Funktionen grosser Zahlen, München Sitzungsberichte, 1917, 191.

[2] И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, М.— Л., 1951.

LIMIT THEOREMS ON THE DISTRIBUTION OF MAXIMUM OF SUMS OF BOUNDED, LATTICE RANDOM VARIABLES. II

A. A. BOROVKOV (MOSCOW)

(*Summary*)

The second part of this paper contains the proofs of integral theorems concerning

$$\overline{s}_n = \max(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu),\ 1 \leqslant \nu \leqslant n$$

where ξ_i are bounded, lattice, independent and identically distributed random variables.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1960

SUR LES THEORÈMES DE KOLMOGOROV — SMIRNOV

*D. A. DARLING**

1. Annonce des résultats. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendentes ayant la fonction de répartition continue $F(x)$ comme loi de distribution, $F_n(x)$ la fonction de répartition empirique des X_i, ξ une variable complexe, $\varphi(\xi)$ la fonction entière

$$\varphi(\xi) = n\left(e^{-\xi/\sqrt{n}} - 1 + \xi/\sqrt{n}\right), \tag{1.1}$$

et W_n^2 la variable aléatoire de Smirnov — Cramér

$$W_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2\, dF(x).$$

Théorème 1. *Soit $\lambda > 0$ et $G(x, y, t)$ la solution fondamentale, singulière par $t = 0$, $y = x$ de l'équation de diffusion*

$$\lambda \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \varphi(-iy)\, G = \frac{\partial G}{\partial t}, \quad t > 0. \tag{1.2}$$

Une telle solution existe et est unique. On a alors

$$\psi_n(\lambda) = \mathbf{E}\left\{e^{-\lambda W_n^2}\right\} = e^n n^{-n} n! \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, 1)\, dx dy.$$

Smirnov [1] a prouvé que $\lim \psi_n = \psi$ où

$$\psi = \psi(\lambda) = \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sinh\sqrt{2\lambda}}\right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

En introduisant une perturbation dans l'équation (1.2) au voisinage de $n \to \infty$ on peut établir le corollaire suivant:

Corollaire 1. *Soit ψ la fonction* (1.3). *On a*

$$\psi_n(\lambda) - \psi + \frac{1}{12n}\left\{\psi\left(\frac{1}{3} - \frac{7}{24}\cosh\sqrt{2\lambda}\right)\psi^3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\cosh 2\sqrt{2\lambda}\right)\psi^5\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty.$$

* Fellow, John Simon Guggenheim Memorial Foundation.

Soit $s > 0$ et $\varphi(\xi)$ l'expression (1.1). Alors $(s - \varphi(\cdot))^{-1}$ est la transformée bilatérale de Laplace d'une certaine fonction $p(y)$, à savoir.

$$p(y) = n^{-1/2} \sum_{j \geqslant \max(0, \sqrt{n}y)} \exp\left\{-\left(1 + \frac{s}{n}\right)(j - \sqrt{n}y)\right\}(j - \sqrt{n}y)^j \frac{1}{j!}. \quad (1.4)$$

Ceci revient à dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $|\mathrm{Re}\,\xi| < \delta$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi y} p(y)\, dy = \frac{1}{s - \varphi(\xi)}.$$

La fonction $p(y)$ est continue sauf au point $y = 0$, et $p(0-) - p(0+) = n^{-1/2}$.

Definissons pour $-\infty < x, y < \infty$

$$g(x, y) = p(x - 0)\, p(y - 0)\, p(-x - y - 0). \quad (1.5)$$

Théorème 2. *Soient $a > 0$, $b > 0$. On a alors*

$$\Phi_n(a, b) = \mathbf{Pr}\{F(x) - a/\sqrt{n} < F_n(x) < F(x) + b/\sqrt{n}, -\infty < x < \infty\} = \\ = e^n n^{-n+1/2} n! \,[G(1+) - G(1-)] \quad (1.6)$$

où $G(t)$ est determinée par sa transformée de Laplace

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\, dG(t) = p(0-) - p(0+) \times \\ \times \frac{g(a, -a) + g(b, -b) - g(a, b) - g(-a, -b)}{g(0, 0) - g(a + b, -a - b)} \quad (1.7)$$

p et g etant donnés par (1.4) *et* (1.5)

Smirnov [2] a prouvé que $\Phi_n(a, b) \to \Phi(a, b)$, $n \to \infty$ où

$$\Phi(a, b) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \{2e^{-2j^2(a+b)^2} - e^{-2(ja+(j-1)b)^2} - e^{-2((j-1)a+jb)^2}\}.$$

Grâce à (1.6) nous pouvons établir le corollaire 2.

Corollaire 2. *Quand $n \to \infty$*

$$\Phi_n(a, b) = \Phi(a, b) + \frac{1}{6\sqrt{n}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quand $a = b = z > 0$ on obtient la distribution de Kolmogorov, et le corollaire 2 donne

$$\mathbf{Pr}\{\sup \sqrt{n}\,|F_n(x) - F(x)| < z\} = \Phi(z) + \frac{1}{6\sqrt{n}}\Phi'(z) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

où

$$\Phi(z) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \exp(-2j^2z^2).$$

Cette dernière formule ne s'accorde ni avec le résultat de Blackman [2] ni avec celui de Korolyuk [4]*.

Designons par $N_n(a)$ le nombre d'intersections de $F_n(x)$ avec $F(x) + a/\sqrt{n}$, $-\infty < x < \infty$, c'est-à-dire le nombre de zeros de $F_n(x) - F(x) - a/\sqrt{n}$.

Théorème 3. *Soit* $a > 0$ *et* $k = 0,1, \ldots, [n - a\sqrt{n}]$. *On a alors*

$$\mathbf{Pr}\{N_n(a) \leqslant k\} = 1 - \frac{a\sqrt{n}+k}{n^n} \sum_{0 \leqslant j < n - a\sqrt{n} - k} \frac{n!}{j!\,(n-k-j)!} \times$$

$$\times (j + a\sqrt{n} + k)^{j-1} (n - j - a\sqrt{n} - k)^{n-j-k}.$$

En prenant $k = 0$ nous obtenons la distribution de

$$D_n^+ = \sup \sqrt{n}\,(F_n(x) - F(x)) \text{ car } \mathbf{Pr}\{D_n^+ < a\} = \mathbf{Pr}\{N_n(a) = 0\}.$$

Smirnov [5] a prouvé que pour $a = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Pr}\{N_n(0) > x\sqrt{n}\} = f(x) = e^{-x^2/2},\ x \geqslant 0. \tag{1.8}$$

et du théorème 3 on peut déduire le corollaire 3.

Corollaire 3. *Si* $a \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, *et* $n \to \infty$.

$$\mathbf{Pr}\{N_n(a) > x\sqrt{n}\} = f(2a + x) + \frac{1}{6\sqrt{n}}(2f'(2a + x) -$$

$$- xf''(2a + x)) + O(1/n),$$

où $f(x)$ *est la fonction* (1.8).

Soit $s > 0$ et $\varphi(\xi)$ la fonction (1.1). La fonction $s - \varphi(\xi)$ n'a alors qu'un seul zéro dont la partie réelle soit positive, et celui-ci est un zéro réel $\xi(s)$. Donc si $s > 0$, $\varphi(\xi(s)) = s$ et $\xi(s) > 0$. Quant à la fonction $p(y)$ de (1.4) nous avons, si $y < 0$, $p(y) = \xi'(s) \exp(y\xi(s))$, $y < 0$.

Soit $T_n(a)$ la somme des parties verticales du graphe de $F_n(x)$ qui excèdent $F(x) + a/\sqrt{n}$, $-\infty < x < \infty$.

Théorème 4. *Soient* $\lambda \geqslant 0$, $a \geqslant 0$. *On a alors*

$$\mathbf{E}\{e^{-\lambda T_n(a)}\} = e^n n^{-n+1/2} n! [G(1 +) - G(1 -)]$$

où la fonction $G(t)$ *est déterminée par sa transformée*

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dG(t) = \xi'(s) - (\xi(s+\lambda) - \xi(s))\, e^{a(\xi(s+\lambda) - \xi(s))} \int_a^\infty e^{-\xi(s+\lambda)y}\,p\,dy.$$

Si $a = 0$ on peut en conclure, que $\mathbf{E}\{e^{-\lambda T_n(0)}\} = (1 - e^{-\lambda})\lambda^{-1}$ c'est-à-dire

* Формулы, предложенные Блекманом [3] и Королюком [4], содержат неточность. Правильный вид первых двух остаточных членов в асимптотическом разложении впервые предложен в работе Чжан Ли-цянь Math. Sinica, 1,4 (1955), 775—790 и там же 6,1 (1956), 55—81, (Прим. ред.).

que $T_n(0)$ est uniformément distribuée sur (0.1) — ce qui est un résultat de Gnedenko — Mihalavic [6]. Nous avons aussi un corollaire limite.

Corollaire 4. *Soient* $a > 0$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. *On a alors*

$$\mathbf{Pr}\{T_n(a) > z\} \to a(2/\pi)^{1/2} \int_0^{1-z} (1-z-t)\frac{\exp(-2a^2/t)}{(t(1-t))^{3/2}}\,dt, \quad n \to \infty.$$

2. **Quelques remarques sur les méthodes de preuve.** On sait depuis longtemps que les résultats asymptotiques peuvent s'obtenir par une considération du processus de Wiener — Lévy. Il est également vrai que les théorèmes cidessus s'obtiennent par une considération du processus simple de Poisson. Soit, en effet, $Y(t)$, $t \geqslant 0$ ledit processus (c'est-à-dire $Y(t)$ est additif avec $\mathbf{Pr}\{Y(t) = k\} = e^{-t}t^k/k!$, $k = 0,1, \ldots, t > 0$) et posons $X_n(t) = \sqrt{n}\left(\frac{Y(nt)}{n} - t\right)$. Il n'est pas difficile de conclure que, en posant pour $V \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$,

$$R(x, y, t) =$$

$$\mathbf{E}\{\exp(-\lambda \int_0^t V(X_n(\tau) + x)\,d\tau) \mid X_n(t) < y - x\}\,\mathbf{Pr}\{X_n(t) < y - x\},$$

nous avons

$$\mathbf{E}\left\{\exp\left(-\lambda \int_{-\infty}^{\infty} V(\sqrt{n}\{F_n(x) - F(x)\}\,dF(x)\right\} =$$

$$= n!\, e^n n^{-n}(R(0, 0+, 1) - R(0, 0-1)).$$

Designons par $r(x, y)$ la densité qui correspond à la transformeé de Laplace de R

$$r(x, y) = \frac{d}{dy}\int_0^{\infty} e^{-st}R(x, y, t)\,dt, \quad y \neq x, \tag{2.1}$$

et par $p(y)$ la résolvente densité de $X_n(t)$

$$p(y) = \frac{d}{dy}\int_0^{\infty} e^{-st}\mathbf{Pr}\{X_n(t) < y\}\,dt, \quad y \neq 0, \tag{2.2}$$

ce qui est donneé par (1.4). La fonction $r(x, y)$ satisfait alors de façon unique à chacune des deux équations intégrales

$$r(x, y) = p(y-x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} p(y-u)V(u)r(x, u)\,du \tag{2.3}$$

$$r(x, y) = p(y-x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} p(u-x)V(u)r(u, y)\,du, \tag{2.4}$$

voir [7].

En choisissant convenablement la fonction V (ou plus généralement une suite de fonctions V_ε, $\varepsilon \to 0$) puis en faisant suivre la résolution d'une des équations par une inversion des variables s et λ, on opère la démonstration des théorèmes précédents.

Par exemple, pour prouver le théorème 2 nous choisissons

$$V_\varepsilon(x) = (2\varepsilon)^{-1} \text{ si } |x-a| < \varepsilon \text{ ou } |x-b| < \varepsilon \text{ et } V_\varepsilon(x) = 0$$

pour les autres valeurs de x. L'équation (2.4) est alors facile à résoudre à la limite $\varepsilon \to 0$, et en faisant $\lambda \to \infty$ dans cette solution nous établissons le théorème 2.

Les corollaires limites se déduisent plus ou moins directement de l'expression limite du résolvant $p(y)$ de (1.4). Nous avons, en effet,

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2s}} e^{-\sqrt{2s}|y|} + \frac{1}{6\sqrt{n}} e^{-\sqrt{2s}|y|}(\sqrt{2s}y - 2\operatorname{sgn} y) + \theta/n,$$

où θ est bornée independemment de y, n.

On est tenté d'essayer prouver ces théorèmes par une resolution de léquation de diffusion liée au processus $X_n(t)$. C'est-à-dire, le générateur infinitesimal de $X_n(t)$ étant L, où

$$Lf(x) = n\left(f\left(x - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} f'(x)\right),$$

pour une fonction bornée et differentiable, on peut espérer, d'après le plan de [8] que la fonction $r(x, y)$ de (2.1) est la solution de Green (en tant que fonction de y) de

$$Lr - (s + V(y))r = 0, \quad y \neq x, \tag{2.5}$$

C'est-à-dire que r s'annule pour $|y| \to \infty$ et satisfait à (2.5) sauf au point $y = x$ ou il y a une saute de grandeur $-n^{-1/2}$. Les solutions ci-dessus ont cette propriété, mais il semble qu'il n'y ait pas de théorèmes d'existence et d'unicité pour ces solutions de Green.

Pour prouver alternativement ie théorème 2 nous avons le problème du «premier passage» pour le processus $X_n(t)$ et nous sommes conduits à considérer la solution de Green, singulière par $x = 0$, de

$$Lf - sf = 0, \quad x \neq 0, \quad -a, \quad b, \tag{2.6}$$

où f s'annule pour $x < -a$ et pour $x > b$. Puisque $p(x-u)$ en est la fonction de Green sur la droite reélle entière (i. e. pour $a = b = \infty$) singulière par $x = u$, considérons la fonction

$$f(x) = p(x) - Ap(x+a) - Bp(x-b)$$

choisissant A et B tels que $f(-a-0) = f(b-0) = 0$. On aura alors une solution de (2.6) identique à (1.6). On prouve ainsi facilement le théorème 2, mais il semble difficile de justifier ce procédé formel.

Institut Henri Poincaré, Paris
University of Michigan, Ann Arbor

Поступила в редакцию
25.12.59

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. V. Smirnov, Sur la distribution de ω^2, C. R. Acad. Sci., Paris, **202** (1936), 449—452.

[2] Н. В. Смирнов, Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках, Бюлл. МГУ, **2**, 2 (1939), 3—14.

[3] J. Blackman, An extension of the Kolmogorov distribution, Ann. Math. Stat., **27** (1956), 513—520.

[4] В. С. Королюк, Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова, ДАН СССР, **95**, 3 (1954), 443—446.

[5] Н. В. Смирнов, Об уклонениях эмпирической кривой распределения. Матем. сб., **6** (48), 1 (1939), 3—26.

[6] Б. В. Гнеденко, В. С. Михалевич, О распределении числа выходов одной эмпирической функции распределения под другой, ДАН СССР, **82**, 6 (1952), 841—844

[7] D. A. Darling, A. J. Siegert, On the distribution of certain functionals of Markov chains and processes, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **42** (1956), 525—529.

[8] D. A. Darling, Etude des fonctionelles additives des processus markoviens, Colloq. Inter. du CNRS, Paris (1958), Le calcul des probabilités et ses applications, 69—80.

К ТЕОРЕМАМ КОЛМОГОРОВА — СМИРНОВА

Д. А. ДАРЛИНГ (ПАРИЖ)

(*Резюме*)

В заметке приводятся без доказательств точные и асимптотические представления распределений величин $\sqrt{n}\sup|F_n(x)-F(x)|$, $N_n(a)$ (число нулей разности $F_n(x)-F(x)-an^{-1/2}$) и преобразований Лапласа величин W_n^2 и $T_n(a)$ (сумма превышений $F_n(x)$ над $F(x)+an^{-1/2}$).

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том V Выпуск 4
1960

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МНОГОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ И ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Ю. А. РОЗАНОВ

Развитие спектральной теории стационарных процессов [1]—[9] обнаружило глубокую связь этой теории с теорией функций комплексного переменного, точнее, с граничными свойствами аналитических функций (в одномерном случае) и аналитических матриц (в многомерном). В то время, как граничные свойства аналитических функций хорошо изучены (см., например, монографию И. И. Привалова [12]), соответствующие свойства аналитических матриц довольно слабо отражены в математической литературе.

В настоящей работе дается обзор (как опубликованных ранее, так и еще не опубликованных) результатов, относящихся к спектральной теории стационарных процессов и граничным свойствам аналитических матриц.

§ 1. Регулярность стационарного процесса и факторизация матрично-значной функции

Под n-мерным стационарным процессом мы будем понимать вектор-столбец

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

компоненты $x_k(t)$ которого являются стационарно связанными функциями в некотором гильбертовом пространстве H, т. е. такими, что корреляционная матрица

$$B(\tau) = \{B_{kl}(\tau)\}_{k,l=\overline{1,n}};\ B_{kl}(\tau) = (x_k(t),\ x_l(t-\tau))$$

не зависит от t (параметр t принимает *целые* значения). Матрица $B(\tau)$ представима в виде

$$B(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda), \qquad (1)$$

где $F(\lambda)$ есть монотонная (т. е. $F(\lambda') - F(\lambda'') \geqslant 0$ при $\lambda' \geqslant \lambda''$), ограниченная матричная функция — спектральная функция процесса $x(t)$. Мы будем считать, что $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна; $f(\lambda) = F'(\lambda)$ называется спектральной плотностью.

Матрица $f(\lambda)$ является положительно определенной (отметим, что для каждой интегрируемой положительно определенной матрицы $f(\lambda)$ существует стационарный процесс $x(t)$ с такой спектральной плотностью [1]).

Обозначим через $H_x^-(\tau)$ линейное замыкание величин $x_k(t)$, $t \leqslant \tau$, $k = \overline{1,n}$; стационарный процесс $x(t)$ называется *регулярным*, если

$$\bigcap_{\tau} H_x^-(\tau) = 0.$$

Будем говорить, что матричная функция $f(\lambda)$ допускает факторизацию, если существует аналитическая в единичном круге матрица $A(z)$, имеющая граничное значение $a(\lambda) = \lim\limits_{\rho \uparrow 1} A(\rho e^{-i\lambda})$, такая, что

$$a(\lambda)\, a^*(\lambda) = 2\pi f(\lambda), \tag{2}$$

где a^* есть матрица, сопряженная к a.

В работе [3] фактически доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Стационарный процесс $x(t)$ регулярен тогда и только тогда, когда его спектральная функция $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна, а спектральная плотность $f(\lambda)$ допускает факторизацию.*

Во всем дальнейшем нам будут встречаться аналитические в единичном круге функции $\Gamma(z)$ так называемого класса H_δ (см. [12]), т. е. такие, что

$$\lim_{\rho \uparrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(\rho e^{-i\lambda})|^\delta d\lambda = H_\delta(\Gamma) < \infty.$$

Будем говорить, что функция $\Gamma(z)$ принадлежит классу N_δ, если ее можно представить в виде отношения $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma_1(z)}{\Gamma_2(z)}$, где $\Gamma_1(z)$ и $\Gamma_2(z)$ принадлежат классу H_δ.

Отметим, что функция $\Gamma(z) \in N_\delta$ имеет граничное значение $\gamma(\lambda) = \lim\limits_{\rho \uparrow 1} \Gamma(\rho e^{-i\lambda})$ для почти всех λ, причем однозначно им определяется [12].

Теорема 2. *Положительно определенная интегрируемая матричная функция $f(\lambda)$ допускает факторизацию тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *Ранг $f(\lambda)$ равен некоторому m для почти всех λ.*

2. *Существует главный минор $M(\lambda) = \det \{f_{i_p i_q}(\lambda)\}_{p,q=\overline{1,m}}$ порядка m, для которого*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log M(\lambda)\, d\lambda > -\infty$$

3. *Функции $\gamma_{i_p j}(\lambda) = M_{i_p j}(\lambda)/M(\lambda)$, (где $M_{i_p j}(\lambda)$ есть минор, получающийся из $M(\lambda)$ заменой i_p строки на j строку, $p = \overline{1,m}$; $j \neq i_p$) являются граничными значениями функций $\Gamma_{i_p j}(z)$ класса H_δ, для некоторого $\delta > 0$.*

(Отметим, что если перечисленные выше условия выполняются для некоторого минора $M(\lambda)$, то они выполняются автоматически для всех главных миноров порядка m, не равных тождественно нулю). Эта теорема (см. [7]) является завершением ряда работ [2]—[6].

§ 2. Скользящее суммирование стационарного процесса и аналитические матрицы

Как известно (см., например, [3], стр. 118), n-мерный регулярный стационарный процесс $x(t)$ можно представить при помощи скользящего суммирования в виде

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a(\tau)\, u(t-\tau), \tag{3}$$

где стационарный процесс

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_q(t) \end{pmatrix}$$

имеет ортонормированные значения ($\| u_j(t) \| = 1$ и $(u_i(t),\ u_j(t')) = 0$ при $i \neq j$ или $t \neq t'$) и стационарно связан с процессом $x(t)$; коэффициенты $a(\tau)$ — это матрицы $a(\tau) = \{a_{kj}(\tau)\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,q}}$. (Отметим, что только регулярный процесс и можно представить в виде (3).)

Рассмотрим матрицу $A(z)$,

$$A(z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a(\tau) z^{\tau}.$$

Поскольку ряд *

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \| a(\tau) \|^2 \cdot \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} | a_{kj}(\tau) |^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \| x_k(0) \|^2 < \infty,$$

то матрица $A(z) = \{A_{kj}(z)\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,q}}$ является аналитической в единичном круге $|z| < 1$ (каждая ее компонента $A_{kj}(z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a_{kj}(\tau) z^{\tau}$ есть аналитическая функция класса H_2).

Положим

$$a(\lambda) = \lim_{\rho \uparrow 1} A(\rho e^{-i\lambda}) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a(\tau)\, e^{-i\lambda\tau}.$$

Граничное значение $a(\lambda)$ удовлетворяет условию (2). Действительно, из представления (3) процесса $x(t)$ получаем, что корреляционная матрица $B(\tau)$ имеет вид

$$B(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} a(s)\, a^*(\tau - s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau}\, a(\lambda)\, a^*(\lambda)\, d\lambda;$$

отсюда и из (1) следует (2).

---

* Норма $\| a \|$ матрицы $a = \{a_{kj}\}$ равна $\left(\sum_{k,j} | a_{kj} |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Нужно сказать, что наименьшая размерность процесса $u(t)$ с ортонормированными значениями, участвующего в представлении (3) процесса $x(t)$, равна рангу m матрицы $f(\lambda)$ — спектральной плотности; число m называется рангом процесса $x(t)$.

Если процесс $u(t)$ в (3) имеет размерность m ($q = m$), то, как показано в [3] стр. 116, величины $u_j(t)$ — компоненты процесса $u(t)$ — принадлежат линейному замыканию H_x величин $x_k(t)$, $k = \overline{1,n}$; $-\infty < t < \infty$.

Теорема 3. *Пусть $x(t)$ — n-мерный стационарный регулярный процесс ранга m со спектральной плотностью $f(\lambda)$. Каждой аналитической матрице $A(z) = \{A_{kj}(z)\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}}$*

$$A(z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a(z) z^{\tau}$$

граничное значение $a(\lambda) = \lim\limits_{\rho \uparrow 1} A(\rho e^{-i\lambda})$ который удовлетворяет условию (2), *соответствует m-мерный стационарный процесс $u(t)$ с ортонормированными значениями, такой, что*

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a(\tau)\, u(t-\tau)$$

причем, если

$$\Phi(d\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1(d\lambda) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_n(d\lambda) \end{pmatrix}$$

спектральное семейство для процесса $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, \Phi(d\lambda),$$

то *

$$u(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \tag{4}$$

где матрица $\varphi(\lambda) = \{\varphi_{jk}(\lambda)\}_{j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,n}}$ определяется из соотношений:

$$\varphi(\lambda) f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} a^*(\lambda)$$

$$\varphi(\lambda) f(\lambda) \varphi^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} I. \tag{5}$$

Доказательство. Из формул (4) и (5) видно, что совместная корреляционная матрица $B^{ux}(\tau) = \{B^{ux}_{jk}(\tau)\}_{j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,n}}$, $B^{ux}_{jk}(\tau) = (u_j(\tau),\ x_k(0))$, имеет вид

$$B^{ux}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} \varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} a^*(\lambda)\, d\lambda,$$

---

* Более подробно равенство (4) означает, что

$$u_j(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \Psi_j(d\lambda), \text{ где } \Psi_j(\Delta) = \int_{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{jk}(\lambda)\, \Phi_k(d\lambda).$$

откуда

$$B^{xu}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} a(\lambda)\, d\lambda.$$

В то же время

$$B^{xu}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} f^{xu}(\lambda)\, d\lambda,$$

где $f^{xu}(\lambda) = \{f_{kj}^{xu}(\lambda)\}_{k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}}$ — совместная спектральная плотность процессов $x(t)$ и $u(t)$. Сопоставляя эти равенства получаем, что

$$f^{xu}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} a(\lambda).$$

На основании леммы 2 работы [3] это соотношение вместе с (2) позволяет заключить, что

$$x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} a(\lambda)\, \Psi(d\lambda),$$

где $\Psi(d\lambda)$ — спектральное семейство процесса $u(t)$. Отсюда легко следует утверждение нашей теоремы.

Далее, определим величины $u_j(z)$, $j = \overline{1,m}$, равенствами

$$u_j(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - z\bar{\theta}} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{jk}(\lambda)\, \Phi_k(d\lambda), \tag{6}$$

где $\theta = e^{-i\lambda}$ и матрица $\varphi(\lambda) = \{\varphi_{jk}(\lambda)\}_{j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n}}$ определяется из соотношений (5).

Лемма 1. *Для элементов $A_{kj}(z)$, $k = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$, аналитической матрицы $A(z)$, фигурирующей в теореме 3, имеет место следующее представление:*

$$A_{kj}(z) = (x_k(0),\ u_j(z)). \tag{7}$$

В самом деле,

$$\{(x_k(0),\ u_j(z)\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - z\bar{\theta}} = f(\lambda)\varphi^*(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta}{\theta - z} a(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\theta|=1} \frac{A(\theta)\, d\theta}{\theta - z} = A(z).$$

Как известно (см., например, [3], стр. 95), стационарному процессу $x(t)$ соответствует унитарный в H_x оператор U:

$$U x(t) = x(t+1).$$

Вернемся к процессу $u(t)$ с ортонормированными значениями, соответствующему аналитической матрице $A(z)$. Именно, рассмотрим пространство $D_u(z) = H_u^-(0) \ominus H_u^-(z)$ — ортогональное дополнение в $H_u^-(0)$ к подпространству $H_u^-(z) = (U^{-1} - zI)\, H_u^-(0)$. Величины $u_j(z)$, $j = \overline{1,m}$, образуют ортогональную базу в пространстве $D_u(z)$.

В самом деле, $u_j(z) = \sum_{t>0} \bar{z}^t u_j(-t) \in H_u^-(0)$, и при любых $t \leqslant 0$

$$(u_i(t-1) - zu_i(t),\ u_j(z)) =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \theta^t(\theta - z)\frac{1}{1-z\bar{\theta}} \sum_{k,l=1}^{n} \varphi_{ik}(\lambda)\overline{\varphi_{jl}(\lambda)} f_{kl}(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta^t(\theta - z)\frac{\theta}{\theta - z}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta^{-t+1} d\lambda = 0;$$

кроме того, как нетрудно понять, размерность пространства $D_u(z)$ не превосходит m, а

$$(u_i(z),\ u_j(z)) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta}{(1-\bar{z}\theta)(\theta - z)} \sum_{k,l} \varphi_{ik}(\lambda)\overline{\varphi_{jl}(\lambda)} f_{kl}(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta\, d\lambda}{(1-\bar{z}\theta)(\theta - z)} = \delta_{ij}\frac{1}{1-|z|^2}, \tag{8}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Лемма 2. *Пусть* $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k(0)$. *Перпендикуляр* h, *опущенный из* y *на пространство* $H_u^-(z)$ *имеет вид*

$$h_u = (1-|z|^2)\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k(0),\ u_j(z)\Big)u_j(z)$$

$$\|h_u\|^2 = (1-|z|^2)^2 \sum_{k,l=1}^{n}\alpha_k\bar{\alpha}_l\sum_{j=1}^{m} A_{kj}(z)\bar{A}_{lj}(z). \tag{9}$$

Равенства (9) сразу следуют из леммы 1 и соотношения (8).

Далее, назовем процесс $u(t)$ с ортонормированными значениями, участвующий в представлении (3), *фундаментальным* для процесса $x(t)$, если

$$H_u^-(\tau) = H_u^-(\tau) \tag{10}$$

при всех τ. Нетрудно показать (см. [3] стр. 117), что фундаментальный процесс определен однозначно «с точностью до унитарного преобразования» т. е. если $u_1(t)$ и $u_2(t)$ любые два фундаментальных процесса, то

$$u_1(t) = Tu_2(t),$$

где T — унитарная матрица порядка m (если $u(t)$ — фундаментальный процесс, то, очевидно, процесс $Tu(t)$, где T — произвольная унитарная матрица, также будет фундаментальным).

М. Г. Крейном была доказана следующая

Теорема 4. *Процесс* $u(t)$, *соответствующий аналитической матрице* $A(z)$, *фундаментален тогда и только тогда, когда матрица* $A(z)$ *максимальна, т. е. когда разность*

$$A(z)A^*(z) - B(z)B^*(z) \geqslant 0 \tag{11}$$

(*положительно определена*) *при всех* z, $|z| < 1$, *для любой аналитической матрицы* $B(z)$, *граничное значение* $b(\lambda)$ *которой удовлетворяет тому же*

условию (2), *что и граничное значение* $a(\lambda)$ *матрицы* $A(z)$. *Все максимальные матрицы определены однозначно с точностью до постоянного множителя — унитарной матрицы* T.

Доказательство. Пусть $v(t)$ — процесс с ортонормированными значениями, соответствующий матрице $B(z)$.

Поскольку $H_x^-(\tau) \subseteq H_v^-(\tau)$, то в силу фундаментальности процесса $u(t)$, $H_u^-(\tau) \subseteq H_v^-(\tau)$. Отсюда следует, что

$$H_u^-(z) \subseteq H_v^-(z),$$

и потому, для величин перпендикуляров h_u и h_v, опущенных из $y \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k(0)$ на подпространства $H_u^-(z)$ и $H_v^-(z)$, выполнено неравенство (см. лемму 2):

$$\|h_u\|^2 = (1-|z|^2)^2 \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k \bar{\alpha}_l \sum_{j=1}^{m} A_{kj}(z)\bar{A}_{lj}(z) \geqslant$$

$$\geqslant (1-|z|^2)^2 \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_k \bar{\alpha}_l \sum_{j=1}^{m} B_{kj}(z)\bar{B}_{lj}(z) = \|h_v\|^2$$

откуда и следует неравенство (11), ввиду произвольности чисел α_k, $k = \overline{1,n}$.

Нужно отметить, что если хотя бы при одном z, $|z| < 1$, разность в (11) обращается в нуль ($BB^*(z) = AA^*(z)$), то матрица $B(z)$ также максимальна.

Теорема 5. *Пусть* $A(z) = \{A_{kj}(z)\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}}$ *есть максимальная матрица, удовлетворяющая граничному условию* (4).

Произвольная аналитическая матрица $B(z) = \{B_{kj}(z)\}_{k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}}$, *удовлетворяющая тому же граничному условию, что и матрица* $A(z)$, *имеет вид*

$$B(z) = A(z)C(z), \tag{12}$$

где аналитическая матрица $C(z) = \{C_{ij}(z)\}_{i,j=\overline{1,m}}$ *— унитарная на границе* $z = e^{-i\lambda}$, *является нерастягивающей, т. е.**

$$I - C(z)C^*(z) \geqslant 0, \tag{13}$$

при всех z, $|z| < 1$.

Доказательство. Пусть $u(t)$ — процесс с ортонормированными значениями, соответствующий максимальной матрице $A(z)$.

Процесс $u(t)$ фундаментален, и потому

$$H_u^-(\tau) = H_x^-(\tau) \subseteq H_v^-(\tau),$$

где $v(t)$ — стационарный процесс, соответствующий матрице $B(z)$.

Из этого соотношения вытекает возможность представить процесс $u(t)$ при помощи скользящего суммирования по процессу $v(t)$,

$$u(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} c(\tau)\, v(t-\tau).$$

---

* ср. [12.]

Поскольку спектральная плотность процесса $u(t)$ есть матрица $\frac{1}{2\pi}I$, соответствующая ей максимальная аналитическая матрица будет, очевидно, единичной. По предыдущей теореме, матрица $C(z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} c(\tau) z^{\tau}$ удовлетворяет неравенству (13).

Далее,

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a(\tau) u(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a(\tau) \sum_{s=0}^{\infty} c(s) v(t-\tau-s) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\tau} a(s) c(\tau-s) v(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^{\infty} b(\tau) U(t-\tau),$$

откуда и следует равенство (12).

Из теоремы (5) легко может быть получена

Теорема 6. *Среди всех аналитических матриц, удовлетворяющих одному и тому же граничному условию* (2) *максимальная матрица* $A(z) = \{A_{kj}(z)\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}}$ *определяется с точностью до унитариого множителя* $T = \{T_{ij}\}_{i,j=\overline{1,m}}$ *модулем значения* $M_A(z_0)$ *своего минора* $M_A(z)$ *порядка* m, *не равного тождественно нулю, в любой точке* z, $|z_0| < 1$.

§ 3. Восстановление максимальной матрицы по «квадрату модуля» ее граничного значения

Чрезвычайно важным вопросом является восстановление максимальной матрицы $A(z)$ по «квадрату модуля» ее граничного значения $a(\lambda)$ — матрицы $f(\lambda)$ — спектральной плотности стационарного процесса $x(t)$.

В одномерном случае ответ дается довольно просто [1]:

$$A(z) = \sqrt{2\pi} \exp\left\{\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda) \frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\, d\lambda\right\}. \tag{14}$$

В многомерном случае, ввиду некоммутативности умножения матриц, при решении этого вопроса возникают большие трудности. Их удается обойти (см. [6]) в случае стационарных процессов ранга 1, и получить явные формулы для элементов $A_k(z)$ максимальной матрицы $A(z)$ (которая состоит лишь из одного столбца):

$$A_k(z) = \sqrt{2\pi} \exp\left\{\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f_{kk}(\lambda) \frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}+z}\, d\lambda\right\}.$$

(15)

$$z^{\tau_k} \prod_p \frac{z-\alpha_p^{(k)}}{1-\overline{\alpha_p^{(k)}} z} \cdot \frac{|\alpha_p^{(k)}|}{\alpha_p^{(k)}} \exp\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z} \sigma_k(d\lambda)\right\}, \quad k = \overline{1,n}$$

(входящие в эту формулы величины определяются по спектральной плотности $f(\lambda)$ способом, указанным в более общей теореме 8 настоящей работы).

Интересный способ нахождения граничного значения $a(\lambda)$ максимальной матрицы $A(z)$ по спектральной плотности $f(\lambda)$ в случае, когда

$$0 < mI \leqslant \| f(\lambda) \| \leqslant MI < \infty$$

указан в работе [9]; именно, не ограничивая общности, можно считать, что

$$f(\lambda) = I + g(\lambda), \quad \| g(\lambda) \| \leqslant g < 1$$

и тогда

$$a(\lambda) = b^{-1}(\lambda)\sqrt{C}, \tag{16}$$

где

$$b(\lambda) = I - g^- + (g^- g)^- - [(g^- g)^- g]^- + \ldots \tag{17}$$

(матрица $h^-(\lambda)$ получается из матрицы $h(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k e^{i\lambda k}$ отбрасыванием положительных степеней $e^{i\lambda k}$, $h^- = \sum_{-\infty}^{0} h_k e^{i\lambda k}$), а матрица C определяется равенством

$$C = b(\lambda) f(\lambda) b^*(\lambda).$$

Сравнительно просто восстанавливается максимальная матрица в случае, когда элементы спектральной плотности рациональны относительно $e^{i\lambda}$, при этом, естественно, оказывается, что элементы самой максимальной матрицы рациональны относительно z.

Лемма 3*. *Положительно определенную матричную функцию* $f(\lambda) = \{f_{kl}(\lambda)\}_{k,l=\overline{1,n}}$ *ранга* m, *элементы* $f_{kl}(\lambda)$ *которой рациональны относительно* $e^{i\lambda}$, *можно представить в виде*

$$f(\lambda) = b(\lambda) b^*(\lambda) \tag{18}$$

где матрица $b(\lambda) = B(e^{-i\lambda}) = \{B_{kj}(e^{-i\lambda})\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}}$ *есть граничное значение аналитической в единичном круге матрицы* $B(z)$, *рациональной относительно* z.

В основе доказательства этой леммы лежит тот факт, что линейным преобразованием, «рациональным» относительно элементов матрицы $f_{kl}(\lambda)$, ее можно привести к диагональному виду.

У матрицы $f(\lambda)$ найдется главный минор $M(\lambda)$ порядка m, обращающийся в нуль лишь в конечном числе точек; пусть, для определенности это будет минор, стоящий в левом верхнем углу матрицы $f(\lambda)$.

Обозначим через M_j, $j = \overline{1,m}$, последовательные главные миноры порядка j, стоящие в левом верхнем углу (отметим, что в силу положительной определенности матрицы $f(\lambda)$, $M_j(\lambda) > 0$ в тех точках λ, в которых $M(\lambda) > 0$).

Прибавим к k-ой строке матрицы f, $k = \overline{2,n}$, первую строку, умноженную на $-f_{k1}/f_{11}$; затем прибавим к l-му столбцу первый столбец, умноженный на $-f_{1l}/f_{11}$; получим матрицу

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & g^{(2)} \end{pmatrix},$$

* Эта лемма была доказана Д. Г. Поляком [8] по предложению автора.

где элементы матрицы $g^{(2)} = \{g_{kl}^{(2)}\}_{k,l=\overline{2,n}}$ имеют вид:

$$g_{kl}^{(2)} = g_{kl}^{(1)} - \frac{g_{k1}^{(1)} g_{1l}^{(1)}}{g_{11}^{(1)}}, \quad g_{kl}^{(1)} = f_{kl}.$$

Элемент $g_{22}^{(2)} = \frac{M_2}{M_1} > 0$, и с матрицей $g^{(2)}$ можно проделать ту же процедуру, что и с матрицей $g^{(1)} = f$. Продолжая этот процесс $m - 1$ раз, приведем матрицу f к диагональному виду

$$f_{(l)}^{(m)} = \operatorname{diag}\{g_{11}^{(1)}, \ldots, g_{mm}^{(m)}, 0, \ldots, 0\},$$

где $g_{ii}^{(i)}$ — элемент, стоящий в левом верхнем углу матрицы $g^{(i)} = \{g_{k,l}^{(i)}\}_{k,l=\overline{i,n}}$, элементы которой связаны с элементами матрицы $g^{(i-1)}$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$g_{kl}^{(i)} = g_{kl}^{(i-1)} - \frac{g_{k,i-1}^{(i-1)} g_{i-1,l}^{(i-1)}}{g_{i-1,i-1}^{(i-1)}}; \quad g_{kl}^{(1)} = f_{kl}.$$

Сами диагональные элементы $g_{ii}^{(i)} = d_i$ определяются, как

$$d_i = \frac{M_i(\lambda)}{M_{i-1}(\lambda)}.$$

Нетрудно проверить, что матрица $f(\lambda)$ представляется в виде:

$$f = gdg^*,$$

где

$$g = \{g_{kj}\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}};\ g_{kj} = 0 \text{ при } j > k,$$

$$g_{jj} = 1;\ g_{kj} = g_{kj}/d_j \text{ при } j < k;$$

$$d = \{d_{ij}\}_{i,j=\overline{1,m}};\ d_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j,\ d_{ii} = d_i.$$

Заметим, что все элементы матриц $g(\lambda)$ и $d(\lambda)$ рациональны относительно $e^{-i\lambda}$,

$$g_{kj}(\lambda) = \frac{P_{kj}(e^{-i\lambda})}{Q_{kj}(e^{-i\lambda})}.$$

Пусть $\alpha_p^{(j)}$, $p = 1, 2, \ldots$ — нули полиномов $Q_{kj}(z)$, $k = \overline{1,n}$, лежащие в единичном круге, считаемые столько раз, какова их максимальная кратность (предполагается, что полиномы P_{kj} и Q_{kj} не имеют общих нулей). Положим

$$C_j(z) = \prod_p (z - \alpha_p^{(j)}),$$

$$D_j(e^{-i\lambda}) = d_j(\lambda)/|C_j(e^{-i\lambda})|^2.$$

Неотрицательную функцию $D_j(e^{-i\lambda})$, рациональную относительно $e^{-i\lambda}$, можно представить в виде (см., например, [11], стр. 450)

$$D_j(e^{-i\lambda}) = \left|\frac{P_j(e^{-i\lambda})}{Q_j(e^{-i\lambda})}\right|^2,$$

полиномы $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ не имеют нулей в единичном круге $|z| < 1$.

Рассмотрим матрицу

$$B(e^{-i\lambda}) = \{B_{kj}(e^{-i\lambda})\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}},$$

где

$$B_{kj}(e^{-i\lambda}) = g_{kj}(\lambda)\, C_j(e^{-i\lambda})\, \frac{P_j(e^{-i\lambda})}{Q_j(e^{-i\lambda})}.$$

Функции $B_{kj}(z)$ — рациональны относительно z и аналитичны в единичном круге.

Нетрудно проверить, что

$$f(\lambda) = B(e^{-i\lambda})\, B^*(e^{-i\lambda}),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Пусть* $f(\lambda) = \{f_{kl}(\lambda)\}_{k,l\ \overline{1,n}}$ — *положительно определенная матричная функция ранга* m, *элементы* $f_{kl}(\lambda)$ *которой рациональны относительно* $e^{i\lambda}$.

Аналитическая матрица $A(z) = \{A_{kj}(z)\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}}$, *удовлетворяющая граничному условию* (2), *максимальна тогда и только тогда, когда ее ранг равен* m *при всех* z, $|z| < 1$, *и все ее элементы* $A_{kj}(z)$ *рациональны относительно* z.

Доказательство. По лемме 3, существует матрица $B(z) = B_{kj}(z)\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}}$ с рациональными элементами, удовлетворяющая граничному условию (2).

Если $A(z)$ — максимальная матрица, то существует нерастягивающая матрица $C(z) = \{C_{ij}(z)\}_{i,j=\overline{1,m}}$ такая, что $B(z) = A(z)\, C(z)$. В силу рациональности матрицы $B(z)$, аналитическая класса $H_{\frac{2}{m}}$ функция $\det C(z)$ имеет лишь конечное число нулей, и потому (см. [13]) матрица $C(z)$ представима в виде $C(z) = b(z)\, D(z)$, где аналитическая матрица $b(z) = \{b_{ij}(z)\}_{i,j=\overline{1,m}}$ рациональна относительно z, а матрица $D(z)$ — нерастягивающая, унитарная на границе, причем $\det D(z)$ не обращается в нуль внутри единичного круга $|z| < 1$.

Пусть $M_B(z)$ — минор порядка m матрицы $B(z)$, не равный тождественно нулю. Из полученных выше равенств вытекает, что

$$M_B(z) = M_A(z) \det b(z) \det D(z),$$

где $M_A(z)$ — соответствующий минор матрицы $A(z)$ — является аналитической функцией класса $H_{\frac{2}{m}}$.

Благодаря параметрическому представлению функций класса $H_{\frac{2}{m}}$ (см., например, [12]) и рациональности $M_B(z)$ нетрудно сообразить, что

$$\det D(z) \equiv e^{i\lambda_0}.$$

Так как матрица $D(z)$ — нерастягивающая, то из последнего равенства немедленно следует, что $D(z) = D$ — постоянная унитарная матрица, а максимальная матрица $A(z) = B(z)\, D^{-1} b^{-1}(z)$ рациональна относительно z и имеет ранг m при всех z, $|z| < 1$ (см. ниже лемму 4).

Заметим, что в случае невырожденной матричной функции максимальную матрицу $A(z) = \{A_{kj}(z)\}_{k,j=\overline{1,n}}$ нетрудно найти, «отщепляя» нули (ср. [13]) матрицы $B(z) = \{B_{kj}(z)\}_{k,j=\overline{1,n}}$, построенной, как указано в доказательстве леммы 3.

Именно, пусть $z = \alpha$ есть нуль функции $\det B(z)$. Представим матрицу $B(\alpha)$ в виде

$$B(\alpha) = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{p_\alpha} \end{pmatrix} V,$$

где V — унитарная матрица, приводящая матрицу $BB^*(\alpha)$ к диагональному виду, а $U = V_1 V^*$, V_1 — унитарная матрица, фигурирующая в полярном разложении матрицы $B(\alpha) = V_1 H$, $H = \sqrt{BB^*(\alpha)}$ (см., например, [14] стр. 225).

Если умножить матрицу $B(z)$ на $b(z)$,

$$b(z) = V^{-1} \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & \frac{1-\bar{\alpha}z}{z-\alpha} \frac{\alpha}{|\alpha|} & \\ 0 & & I_{n-p} \end{pmatrix},$$

то матрица $B_1(z) = B(z)\,b(z)$ будет, очевидно, аналитической, и также, как и $B(z)$, она удовлетворяет граничному условию (2); кроме того, функция $\det B(z)$ будет иметь на $n - p$ нулей меньше, чем $\det B(z)$. Продолжая этот процесс, придем, наконец; к матрице $A(z)$, у которой детерминант не обращается в нуль внутри единичного круга (она, по доказанной выше теореме, и будет максимальной).

Рассмотрим далее произвольную матричную функцию $f(\lambda) = \{f_{kl}(\lambda)\}_{k,l=\overline{1,n}}$ ранга m, допускающую факторизацию.

Лемма 4. *Ранг максимальной матрицы $A(z)$ равен рангу m матрицы $f(\lambda)$ при всех z, $|z| < 1$.* (Доказательство см. в работе [3], стр. 121.)

Пусть $M(\lambda)$ — главный минор порядка m матрицы $f(\lambda)$, отличный от нуля почти всюду (такой минор существует в силу теоремы 3); пусть для определенности это будет главный минор, стоящий в левом верхнем углу.

Пусть α_p, $p = 1, 2, \ldots$ полюсы функций $\Gamma_{kl}(z)$ класса N_δ, $k = \overline{1,m}$, $l = \overline{m+1,n}$, граничные значения $\gamma_{kl}(\lambda)$ которых фигурируют в условиях теоремы 2, причем каждый полюс считается столько раз, какова его максимальная кратность.

Лемма 5. *Числа α_p, $p = 1, 2, \ldots$, и только они, являются нулями верхнего минора $M_A(z)$ порядка m максимальной матрицы $A(z)$, удовлетворяющей граничному условию* (2).

Доказательство. Как нетрудно заметить (ср. [7]), элементы $A_{kj}(z)$ матрицы $A(z)$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$A_{lj}(z) = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{kl}(z)\, A_{kj}(z), \quad l = \overline{m+1,n}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{19}$$

Пусть α не является полюсом ни одной из функций $\Gamma_{kl}(z)$; тогда строки матрицы $A(\alpha)$ линейно выражаются через первые m строк; если бы

$z = \alpha$ был бы нулем минора $M_A(z)$, то ранг матрицы $A(\alpha)$ был бы меньше m, чего не может быть в силу леммы 4. Следовательно, нули минора $M_A(z)$ могут быть только среди полюсов α_p. Но, как видно из (19), функции $\Gamma_{kl}(z)$ имеют вид

$$\Gamma_{kl}(z) = \frac{M_{kl}(z)}{M_A(z)},$$

где минор $M_{kl}(z)$ получается из минора $M_A(z)$ заменой k-ой строки, $k = \overline{1,m}$, на l-ую строку, $l = \overline{m+1,n}$. Поскольку функции $M_A(z)$ и $M_{kl}(z)$ являются аналитическими, полюсы α_p, $p = 1, 2, \ldots$, могут быть только среди нулей минора $M_A(z)$, что и требовалось доказать.

Вернемся снова к матричной функции $f(\lambda) = \{f_{kl}(\lambda)\}_{k,l=\overline{1,n}}$ ранга m с рациональными относительно $e^{i\lambda}$ элементами.

Пусть $A(z) = \{A_{kl}(z)_{k=\overline{1,n};\ l=\overline{1,m}}$ есть максимальная аналитическая матрица, отвечающая граничному условию (2) и $M_A(z)$ — минор порядка m матрицы $A(z)$, не равный тождественно нулю (пусть для определенности это будет верхний минор).

Главный верхний минор $M(\lambda)$ порядка m матрицы $f(\lambda)$ рационален относительно $e^{-i\lambda}$,

$$M(\lambda) = \frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})}.$$

Пусть β_q, $q = 1, 2, \ldots$, и γ_s, $s = 1, 2, \ldots$, нули полиномов P и Q, не лежащие внутри единичного круга, и считаемые столько раз, какова их кратность. Будучи положительным, минор $M(\lambda)$ представим в виде (см. [11], стр. 450)

$$M(\lambda) = c^2 \left| \frac{\prod_q (e^{-i\lambda} - \beta_q)}{\prod_s (e^{-i\lambda} - \gamma_s)} \right|^2.$$

Функции $\Gamma_{kl}(e^{-i\lambda}) = M_{kl}(\lambda)/M(\lambda)$ (см. теорему 2) имеют вид

$$\Gamma_{kl}(e^{-i\lambda}) = \frac{P_{kl}(e^{-i\lambda})}{Q_{kl}(e^{-i\lambda})}.$$

Пусть α_p, $\alpha_p \neq 0$, $p = 1, 2, \ldots$, нули полиномов $Q_{kl}(z)$, $k = \overline{1,m}$, $l = \overline{m+1,n}$, лежащие в единичном круге и считаемые столько раз, какова их максимальная кратность, пусть τ — максимальная кратность нуля $z = 0$.

Обозначим через $D(z)$ функцию

$$D(z) = cz^\tau \prod_p \frac{z - \alpha_p}{1 - \bar{\alpha}_p z} \frac{|\alpha_p|}{\alpha_p} \frac{\prod_q (z - \beta_q)}{\prod_s (z - \gamma_s)}. \tag{20}$$

Поскольку $|M_A(e^{-i\lambda})|^2 = (2\pi)^m M(\lambda)$, то по теореме о параметрическом представлении функций класса H_δ и рациональности $M_A(z)$ относительно z

$$M_A(z) = e^{i\lambda_0} (2\pi)^{\frac{m}{2}} D(z). \tag{21}$$

Сформулируем в качестве гипотезы (подтверждающейся в ряде частных случаев*) следующую теорему (ср. [9], стр. 145).

Теорема 8. *Пусть* $f(\lambda) = \{f_{kl}(\lambda)\}_{k,l=\overline{1,n}}$ — *матричная функция ранга* m, *допускающая факторизацию и* $A(z) = \{A_{kj}(z)\}_{k=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}}$, *отвечающая ей максимальная аналитическая матрица.*

Минор $M_A(z)$ *порядка* m *матрицы* $A(z)$, *не равный тождественно нулю (пусть для определенности верхний минор), имеет вид:*

$$M_A(z) = z^{\tau} \prod_p \frac{z-\alpha_p}{1-\bar{\alpha}_p z} \frac{|\alpha_p|}{\alpha} \cdot e^{i\lambda_0} (2\pi)^{\frac{m}{2}} \exp\left\{\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg M(\lambda)\, \frac{e^{i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\, d\lambda\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\, \sigma(d\lambda)\right\}, \tag{22}$$

где τ — *максимальная кратность полюса* $z=0$ *функций* $\Gamma_{kl}(z)$, $k=\overline{1,m}$, $l=\overline{m+1,n}$, *фигурирующих в теореме 2,* α_p, $p=1,2,\ldots$, *остальные их полюсы, считаемые столько раз, какова их максимальная кратность:* $M(\lambda)$ — *главный верхний минор матрицы* $f(\lambda)$, *а положительная мера* $\sigma(d\lambda)$, *определяется следующим образом:*

$$\sigma(\Delta) = \int_{\Delta} p(\lambda)\, \tilde{\sigma}(d\lambda),$$

где

$$p(\lambda) = \max_{k,l} \{p_{kl}(\lambda)\}, \quad p_{kl}(\lambda) = \frac{\sigma_{kl}^{+}(d\lambda)}{\tilde{\sigma}(d\lambda)},$$

$$\tilde{\sigma}(\Delta) = \sum_{k,l} \sigma_{kl}^{+}(\Delta),$$

мера $\sigma_{kl}^{+}(d\lambda)$ *есть положительная часть (в смысле разложения Хана-Жордана) меры* $\sigma_{kl}(d\lambda)$, *определяющейся на интервале* $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\sigma_{kl}(\lambda_1) = \sigma_{kl}(\lambda_2) = 0$, *соотношением:*

$$\sigma_{kl}(\Delta) = \lim_{\rho \uparrow 1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \log |\delta_{kl}(\rho e^{-i\lambda})|\, d\lambda,$$

в котором функция $\delta_{kl}(z)$ *имеет вид*

$$\delta_{kl}(z) = \Gamma_{kl}(z) \exp\left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{M_{kl}(\lambda)}{M(\lambda)} \cdot \frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z} d\lambda \right\} \times$$

$$\times z^{-\tau_{kl}} \prod_p \frac{\alpha_{kl}^{(p)} - z}{1-\bar{\alpha}_{kl}^{(p)} z} \frac{|\alpha_{kl}^{(p)}|}{\alpha_{kl}^{(p)}} \prod_q \frac{1-\bar{\beta}_{kl}^{(q)}(z)}{\beta_{kl}^{(q)} - z} \cdot \frac{\beta_{kl}^{(q)}}{|\beta_{kl}^{(q)}|},$$

где τ_{kl} *кратность полюса* $z=0$ *функции* $\Gamma_{kl}(z)$ (*в случае, когда* $z=0$ *не является полюсом,* $-\tau_{kl}$ *есть кратность нуля* $z=0$ *функции* $\Gamma_{kl}(z) \not\equiv 0$), $\alpha_{kl}^{(p)}$ — *остальные ее полюсы и* $\beta_{kl}^{(q)}$ — *ее нули, считаемые столько раз, какова их кратность;* $M_{kl}(\lambda)$ *есть главный верхний минор порядка* m

* Теорема 8 доказана, например, в случаях $m=1$ и $m=n$, а также при рациональности $f(\lambda)$ относительно $e^{i\lambda}$.

матрицы, получающийся из $f(\lambda)$ *заменой* k*-ой строки и* k*-го столбца* $(k = \overline{1,m})$ *на* l*-ую строку и* l*-ый столбец* $(l = \overline{m+1,n})$; *в случае, если* $M_{kl}(\lambda) = 0$, $\sigma_{kl}(\Delta) \equiv 0$.

§ 4. Экстраполяция многомерных стационарных процессов

Задача экстраполяции многомерного стационарного процесса $x(t)$ заключается в нахождении величин $\hat{x}_k(t, \tau)$, $t > \tau$, удовлетворяющих условию

$$\sigma_k(t, \tau) = \min_{h \in H_x^-(\tau)} \| x_k(t) - h \| = \| x_k(t) - \hat{x}_k(t, \tau) \|.$$

Эти величины легко находятся из представления (3) процесса $x(t)$ при помощи скользящего суммирования по фундаментальному процессу $u(t)$:

$$\hat{x}_k(t, \tau) = \sum_{s=t-\tau}^{\infty} a(s)\, u(t-s),$$

где $a(s)$ — коэффициенты при z^s разложения в ряд максимальной матрицы $A(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a(s) z^s$, соответствующей процессу $u(t)$; сам процесс $u(t)$ легко определяется по этой максимальной матрице $A(z)$ (см. теорему 3).

Таким образом, задача нахождения величин $\hat{x}_k(t, \tau)$ сводится к нахождению максимальной матрицы $A(z)$, отвечающей спектральной плотности $f(\lambda)$ стационарного процесса $x(t)$.

В заключение приведем одну теорему, устанавливающую формулу для минимальных ошибок при экстраполировании процесса $x(t)$ на один шаг вперед (ср. [10]).

Пусть процесс $x(t)$ имеет ранг m, и $x_{i_1}(t), \ldots, x_{i_m}(t)$ — произвольные m его компонент. Рассмотрим величины

$$y_p = \sum_{q=1}^{m} c_{pq} x_{i_q}(0); \quad p = \overline{1,m},$$

где матрица $C = \{c_{pq}\}_{p,q=\overline{1,m}}$ имеет определитель, по модулю равный 1. Положим

$$\rho(C) = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} \inf_{h \in H_x^-(-1)} \| y_p - h \|^2.$$

Теорема 10. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\inf_{C} \rho(C) = |M_A(0)|^{2/m}, \tag{23}$$

где $M_A(z) = \det \{A_{i_p j}(z)\}_{p,j=\overline{1,m}}$ *есть минор максимальной матрицы* $A(z)$, *соответствующий выбранным компонентам* $x_{i_1}(t), \ldots, x_{i_m}(t)$.

Доказательство. Пусть $u(t)$ фундаментальный процесс, соответствующий максимальной матрице $A(z) = \{A_{kj}(z)\}_{k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}}$.

Поскольку $H_u^-(\tau) = H_x^-(\tau)$, из формулы (9) следует, что

$$\min_{h \in H_x^-(-1)} \| y_p - h \|^2 = \sum_{k,l=1}^{m} c_{pk} c_{pl} \sum_{j=1}^{m} A_{i_k j}(0)\, \overline{A}_{i_l j}(0)$$

и

$$p(C) = \frac{1}{m} \operatorname{tr} C\widetilde{A}\widetilde{A}^*C^*$$

есть нормированный след матрицы $B = C\widetilde{A}\widetilde{A}^*C^*$, где $\widetilde{A} = \{A_{l-k}(0)\}_{k,l=\overline{1,m}}$. Благодаря неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим,

$$\frac{1}{m} \operatorname{tr} B \geqslant (\det B)^{1/m} = |\det \widetilde{A}|^{2/m} = |M_A(0)|^{2/m}.$$

Пусть $M_A(0) \neq 0$ (в случае, когда $M_A(0) = 0$, утверждение теоремы очевидно). Если V есть унитарная матрица, приводящая матрицу $\widetilde{A}\widetilde{A}^*$ к диагональному виду $\operatorname{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_m^2)$, и $D = M_A(0)^{1/m} \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_m^{-1})$, то матрица $C = DV$ обладает тем свойством, что

$$\frac{1}{m} \operatorname{tr} C\widetilde{A}\widetilde{A}^*C^* = |M_A(0)|^{2/m}.$$

Теорема доказана.

Поступила в редакцию
18.11.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ, 2, 6 (1941), 1—40.
[2] В. Н. Засухин, К теории многомерных стационарных случайных процессов, ДАН СССР, 33 (1941), 435—437.
[3] Ю. А. Розанов, Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем, УМН, XIII, 2 (80) (1958), 93—142.
[4] N. Wiener, On the factorisation of matrices, Comm. Mat. Helv. 29 (1955) 97—111.
[5] P. Masani, N. Wiener, On bivariate stationary processes and the factorization of matrix-valued functions, Теор. вероят. и ее примен. IV, 3 (1959), 322—331.
[6] Ю. А. Розанов. Линейная экстраполяция многомерных стационарных процессов ранга 1 с дискретным временем, ДАН СССР, 125, 2 (1959), 277—280.
[7] Р. Ф. Матвеев, О регулярности многомерных стационарных процессов, ДАН СССР, 126, 5 (1959).
[8] Д. Г. Поляк, Дипломная работа, МГУ. 1959.
[9] N. Wiener, P. Masani, The prediction theory of multivariate stochastic processes, I, Acta Math., 98, (1957), 111—150: II, Acta Math., 99 (1958), 93—137.
[10] H. Helson, D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables, Acta Math., 99 (1958), 165—202.
[11] Дж. А. Дуб, Вероятностные процессы, М., И—Л, 1956.
[12] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
[13] В. П. Потапов, Мультипликативная структура J-нерастягивающих матрично-значных функций, Тр. Моск. матем. об-ва, 5, 1955.
[14] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1953.

SPECTRAL PROPERTIES OF MULTIVARIATE STATIONARY PROCESSES AND BOUNDARY PROPERTIES OF ANALYTIC MATRICES

Yu. A. ROZANOV (MOSCOW)

(*Summary*)

A survey is presented of some recent results obtained in the spectral theory of multivariate time series closely connected with the boundary properties of analytic matrices.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1960

О КРАЙНИХ ЧЛЕНАХ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА И ИХ РОЛИ В СУММЕ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

Д. З. АРОВ, А. А. БОБРОВ

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые, одинаковораспределенные случайные величины, функция распределения которых $F(x)$ удовлетворяет условию регулярности роста при $|x| \to \infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\chi(kx)}{\chi(x)} = \frac{1}{k^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty, \quad k > 0 \text{ — любое}, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\chi(-x)}{\chi(x)} = c, \quad 0 \leqslant c \leqslant +\infty, \tag{2}$$

где

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 - F(x) & \text{при } x > 0, \\ F(x) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Если

$$\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)} \tag{3}$$

— те же величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но записанные в порядке убывания их модулей $|\xi_1^{(n)}| \geqslant |\xi_2^{(n)}| \geqslant \ldots \geqslant |\xi_n^{(n)}|$, то величина $\xi_k^{(n)}$, при фиксированном индексе $k < n$, называется крайним членом ряда (3), индекс k — его порядковым номером.

В работах Дарлинга [1] и Боброва [2] исследуется роль максимального члена $\xi_1^{(n)}$ в сумме

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)} \tag{4}$$

путем рассмотрения предельного распределения надлежащим образом нормированных величин $\frac{S_n}{\xi_1^{(n)}}$ при $n \to \infty$. В частности в них устанавливается при $\alpha = 0$ предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{M} \left(\frac{S_n}{\xi_1^{(n)}} + 1 \right)^2 = 0. \tag{5}$$

В настоящей работе более углубленно исследуется роль крайних членов в сумме (4). В § 1 устанавливается плотность предельного совместного распределения двух крайних членов $\xi_k^{(n)}$ и $\xi_m^{(n)}$ и, как следствие, получается предельное распределение для отношения $\xi_k^{(n)}/\xi_m^{(n)}$. Затем (§ 2) находится

предельное совместное распределение крайних членов $\xi_k^{(n)}$ и сумм $S_n^{(k)}$:

$$S_n^{(k)} = \begin{cases} \xi_{k+1}^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)} & \text{при } 0 < \alpha < 1 \\ \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)} - na \text{ при } 1 < \alpha < 2, \ a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF(x), \end{cases}$$

и, как следствие, получается предельное распределение для $S_n^{(k)}/\xi_k^{(n)}$. Развитый метод применяется (§ 3) для выяснения суммарной роли первых k старших членов $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}$ в сумме (4). В зависимости от значения показателя роста α исходной функции распределения $F(x)$, полученный результат можно представить следующими соотношениями:

для $\alpha = 0$ $\quad S_n = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_k^{(n)} + o(1)\,\xi_k^{(n)}$,

для $0 < \alpha < 1$ $S_n = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_{k_n}^{(n)} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + o(1)\right) k_n \xi_{k_n}^{(n)}$ $\Big\}$ $k_n \to \infty$

для $1 < \alpha < 2$ $S_n = na + o(1)\, k_n \xi_{k_n}^{(n)}$ $\Big\}$ $k_n = o\left(\frac{n}{\lg n}\right)$,

где $o(1)$ — величина, стремящаяся по вероятности к 0 при $n \to \infty$. В работе используется метод, примененный в упомянутых работах [1,2]. В дальнейшем существенным образом будем опираться на следующие теоремы о свойствах функций регулярного роста (см. [2], стр. 19—20).

Теорема 1. *Если $\chi(x)$ удовлетворяет условию* (1) *с показателем* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty$, *то обратная функция при любом* $k > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{x \to +0} \frac{\chi^{-1}(kx)}{\chi^{-1}(x)} = \frac{1}{k^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{6}$$

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \left| \frac{\chi(ux)}{\chi(x)} - \frac{1}{u^\alpha} \right| du = 0 \quad \text{для } 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{7}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^{+\infty} \left| \frac{\chi(ux)}{\chi(x)} - \frac{1}{u^\alpha} \right| du = 0 \quad \text{для } 1 < \alpha < +\infty. \tag{8}$$

§ 1. Предельное распределение крайних членов

Наша ближайшая задача — найти предельную плотность совместного распределения соответственным образом нормированных крайних членов $\xi_k^{(n)}$ и $\xi_m^{(n)}$, $k < m$, при $n \to \infty$. Допустим сперва существование $F'(x) = f(x)$. Тогда плотность совместного распределения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при условии осуществления события $A_{k,m} = (|x_i| \geqslant |x_k|$ при $1 \leqslant i < k$, $|x_m| \leqslant |x_i| \leqslant |x_k|$ при $k < i < m$; $|x_i| \leqslant |x_m|$ при $m < i \leqslant n)$ дается формулой

$$\overline{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n!}{(k-1)!\,(m-k-1)!\,(n-m)!}\, f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_n) \text{ если } (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A_{k,m} \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{9}$$

Введем в рассмотрение систему гипотез $A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = (|x_{i_j}| \geqslant |x_{i_k}|$ при $1 \leqslant j \leqslant k$; $|x_{i_m}| \leqslant |x_{i_j}| \leqslant |x_{i_k}|$ при $k \leqslant j \leqslant m$; $|x_{i_j}| \leqslant |x_{i_m}|$ при $m \leqslant j \leqslant n)$, где k и m — ранее фиксированные числа. Так как эти гипотезы равновероятны, образуют полную систему событий и $A_{1,\ldots,n} = A_{k,m}$, то

$$\mathbf{M}\left[e^{it_1\xi_k^{(n)}+it_2\xi_m^{(n)}}\right] = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \mathbf{P}(A_{i_1,\ldots,i_n})\,\mathbf{M}_{A_{i_1,\ldots,i_n}}\left[e^{it_1\xi_k^{(n)}+it_2\xi_m^{(n)}}\right] =$$

$$= \mathbf{M}_{A_{1,\ldots,n}}\left[e^{it_1\xi_k^{(n)}+it_2\xi_m^{(n)}}\right] = \mathbf{M}_{A_{k,m}}\left[e^{it_1\xi_k^{(n)}+it_2\xi_m^{(n)}}\right],$$

где $\mathbf{M}_{A_{i_1,\ldots,i_n}}$ — условное математическое ожидание, суммирование ведется по всем возможным гипотезам.

Так как при условии осуществления события $A_{k,m}$ имеем $\xi_k^{(n)} = x^k$ и $\xi_m^{(n)} = x_m$, то, учитывая (9), получим

$$\mathbf{M}\left[e^{it_1\xi_k^{(n)}+it_2\xi_m^{(n)}}\right] = \mathbf{M}_{A_{k,m}}\left[e^{it_1\xi_k^{(n)}+it_2\xi_m^{(n)}}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_1y_k+it_2y_m} f(y_1, \ldots, y_n)\,dy_1 \ldots dy_n =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(m-k-1)!\,(n-m)!}\int_0^{+\infty} e^{it_1y_k}\left[\int_{-\infty}^{-y_k} f(x)\,dx + \int_{y_k}^{+\infty} f(x)\,dx\right]^{k-1}\left\{\int_{-y_k}^{0} e^{it_2y_m}\left[\int_{-y_k}^{y_m} f(x)\,dx + \int_{-y_m}^{y_k} f(x)\,dx\right]^{m-k-1}\left[\int_{y_m}^{-y_m} f(x)\,dx\right]^{n-m} f(y_m)\,dy_m + \int_0^{y_k} e^{it_2y_m}\left[\int_{-y_k}^{-y_m} f(x)\,dx + \int_{y_m}^{y_k} f(x)\,dx\right]^{m-k-1}\left[\int_{-y_m}^{y_m} f(x)\,dx\right]^{n-m} f(y_m)\,dy_m\right\} f(y_k)\,dy_k +$$

$$+ \frac{n!}{(k-1)!\,(m-k-1)!\,(n-m)!}\int_{-\infty}^{0} e^{it_1y_k}\left[\int_{-\infty}^{y_k} f(x)\,dx + \int_{-y_k}^{+\infty} f(x)\,dx\right]^{k-1}\left\{\int_{y_k}^{0} e^{it_2y_m}\left[\int_{y_k}^{y_m} f(x)\,dx + \int_{y_m}^{-y_k} f(x)\,dx\right]^{m-k-1}\left[\int_{y_m}^{-y_m} f(x)\,dx\right]^{n-m} f(y_m)\,dy_m + \int_0^{-y_k} e^{it_2y_m}\left[\int_{y_k}^{-y_m} f(x)\,dx + \int_{-y_m}^{-y_k} f(x)\,dx\right]^{m-k-1}\left[\int_{y_m}^{y_m} f(x)\,dx\right]^{n-m} f(y_m)\,dy_m\right\} f(y_k)\,dy_k =$$

$$= I_1^{(n)}(t_1, t_2) + I_2^{(n)}(t_1, t_2) + I_3^{(n)}(t_1, t_2) + I_4^{(n)}(t_1, t_2);$$

$$I_1^{(n)}(t_1, t_2) = \frac{n!}{(k-1)!\,(m-k-1)!\,(n-m)!} \int_0^{+\infty} e^{it_1 y_k} \left[\int_{-\infty}^{-y_k} f(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{y_k}^{+\infty} f(x)\,dx \right]^{k-1} \left\{ \int_{-y_k}^{0} e^{it_2 y_m} \left[\int_{-y_k}^{y_m} f(x)\,dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{-y_m}^{y_k} f(x)\,dx \right]^{m-k-1} \left[\int_{y_m}^{-y_m} f(x)\,dx \right]^{n-m} f(y_m)\,dy_m \right\} f(y_k)\,dy_k =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(m-k-1)!\,(n-m)!} \int_0^{+\infty} e^{it_1 y} [\chi(y) + \chi(-y)]^{k-1} \int_0^{y} e^{-it_2 x} [\chi(x) + \chi(-x) -$$

$$- \chi(y) - \chi(-y)]^{m-k-1} [1 - \chi(x) - \chi(-x)]^{n-m} d\chi(-x)\,d\chi(y).$$

Согласно (2) будем иметь

$$\chi(x) + \chi(-x) = \chi(x)[1 + c + o(1)] = \chi(-x)\left[\frac{1+c}{c} + o(1)\right] (x \to +\infty). \quad (10)$$

Введем теперь в рассмотрение константы $a_n = (1+c)^{\frac{1}{\alpha}} \chi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$. По теореме 1 будем иметь согласно (1), (2)

$$\frac{x}{a_n} = \frac{\chi^{-1}[\chi(x)]}{(1+c)^{\frac{1}{\alpha}} \chi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1 + o(1)}{(1+c)^{\frac{1}{\alpha}} [n\chi(x)]^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1 + o(1)}{(1+c)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\frac{1}{c} n\chi(-x)\right]^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad (11)$$

$$\frac{x}{a_n} = [(1+c)\,n\chi(x)]^{-\frac{1}{\alpha}}[1 + o(1)] = \left[\frac{1+c}{c} n\chi(-x)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}[1 + o(1)] \ (x \to +\infty).$$

Учитывая, что $|(\chi(y) + \chi(-y)]\, e^{it_1 \frac{y}{a_n}}| < 1$, $|[\chi(x) + \chi(-x) - \chi(y) -$ $- \chi(-y)]\, e^{-it_2 \frac{x}{a_n}}| < 1$, $0 < 1 - \chi(x) - \chi(-x) < 1$, будем иметь согласно (10) и (11)

$$J_1^{(n)}\left(\frac{t_1}{a_n}, \frac{t_2}{a_n}\right) = \frac{n!}{(k-1)!\,(m-k-1)!\,(n-m)!} \int_{y_0}^{+\infty} e^{it_1 [(1+c)\, n\chi(y)]^{-\frac{1}{\alpha}[1+o(1)]}} [\chi(y)(1 +$$

$$+ c + o(1))]^{k-1} \int_{x_0}^{y} e^{-it_2 \left[\frac{1+c}{c} n\chi(-x)\right]^{-\frac{1}{\alpha}[1+o(1)]}} [\chi(-x)\left(\frac{1+c}{c} + o(1)\right) -$$

$$- \chi(y)(1 + c + o(1))]^{m-k-1} \left[1 - \chi(-x)\left(\frac{1+c}{c} + o(1)\right)\right]^{n-m} d\chi(-x)\,d\chi(y) +$$

$$+ o(1),$$

где x_0 и y_0 — произвольно большие числа, $o(1)$ под знаком интеграла при $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$, вне интеграла при $n \to \infty$. В результате замены переменных $(1+c)\,n\chi(y) = u$ и $\frac{1+c}{c} n\chi(-x) = v$ и перехода к пределу при

$n \to \infty$, $y_0 \to +\infty$, $x_0 \to +\infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} I_1^{(n)}\left(\frac{t_1}{a_n}, \frac{t_2}{a_n}\right) =$

$$= \frac{c}{(1+c)^2} \frac{1}{(k-1)!(m-k-1)!} \int_0^\infty e^{it_1 u - \frac{1}{\alpha}} u^{k-1} \int_u^\infty e^{-it_2 v - \frac{1}{\alpha}} (v-u)^{m-k-1} e^{-v}\, dv du.$$

Аналогично получаем

$$\lim_{n\to\infty} I_2^{(n)}\left(\frac{t_1}{a_n}, \frac{t_2}{a_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+c)^2} \frac{1}{(k-1)!\,(m-k-1)!} \int_0^\infty e^{it_1 u - \frac{1}{\alpha}} u^{k-1} \int_u^\infty e^{it_2 v - \frac{1}{\alpha}} (v-u)^{m-k-1} e^{-v}\, dv du,$$

$$\lim_{n\to\infty} I_3^{(n)}\left(\frac{t_1}{a_n}, \frac{t_2}{a_n}\right) =$$

$$= \frac{c^2}{(1+c)^2} \frac{1}{(k-1)!\,(m-k-1)!} \int_0^\infty e^{-it_1 u - \frac{1}{\alpha}} u^{k-1} \int_u^\infty e^{-it_2 v - \frac{1}{\alpha}} (v-u)^{m-k-1} e^{-v}\, dv du \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_4^{(n)}\left(\frac{t_1}{a_n}, \frac{t_2}{a_n}\right) =$$

$$= \frac{c}{(1+c)^2} \frac{1}{(k-1)!\,(m-k-1)!} \int_0^\infty e^{-it_1 u - \frac{1}{\alpha}} u^{k-1} \int_u^\infty e^{it_2 v - \frac{1}{\alpha}} (v-u)^{m-k-1} e^{-v}\, dv du.$$

Обозначим характеристические функции совместного и предельного совместного распределений величин $\frac{\xi_k^{(n)}}{a_n}$ и $\frac{\xi_m^{(n)}}{a_n}$, $k < m$, соответственно через $f_{k,m}^{(n)}(t_1, t_2)$ и $f_{k,m}(t_1, t_2)$, так что $f_{k,m}(t_1, t_2) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{k,m}^{(n)}(t_1, t_2)$;

$$\frac{1}{1+c} = p, \frac{c}{1+c} = q, \quad p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad p+q = 1. \tag{13}$$

Тогда $f_{k,m}(t_1, t_2) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{k,m}^{(n)}(t_1, t_2) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left[e^{it_1 \frac{\xi_k^{(n)}}{a_n} + it_2 \frac{\xi_m^{(n)}}{a_n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[I_1^{(n)}\left(\frac{t_1}{a_n}, \frac{t_2}{a_n}\right) +\right.$$

$$\left. + I_2^{(n)}\left(\frac{t_1}{a_n}, \frac{t_2}{a_n}\right) + I_3^{(n)}\left(\frac{t_1}{a_n}, \frac{t_2}{a_n}\right) + I_4^{(n)}\left(\frac{t_1}{a_n}, \frac{t_2}{a_n}\right)\right],$$

откуда, учитывая (12) и (13), получим

$$f_{k,m}(t_1, t_2) = p^2 f^+_{k,m}(t_1, t_2) + pq f^+_{k,m}(t_1, -t_2) + \\ + pq f^+_{k,m}(-t_1, t_2) + q^2 f^+_{k,m}(-t_1, -t_2), \tag{14}$$

где $f^+_{k,m}(t_1, t_2)$ — характеристическая функция предельного совместного распределения величин $\frac{|\xi_k^{(n)}|}{a_n}$ и $\frac{|\xi_m^{(n)}|}{a_n}$ при $n \to \infty$,

$$f^+_{k,m}(t_1, t_2) = \\ = \frac{1}{(k-1)!\,(m-k-1)!} \int_0^\infty e^{it_1 u - \frac{1}{\alpha}} u^{k-1} \int_u^\infty e^{it_2 v - \frac{1}{\alpha}} (v-u)^{m-k-1} e^{-v}\, dv\, du. \tag{15}$$

Произведя в (15) замену переменных $u = y^{-\alpha}$, $v = x^{-\alpha}$, получим

$$f^+_{k,m}(t_1, t_2) = \\ = \frac{\alpha^2}{(k-1)!\,(m-k-1)!} \int_0^\infty \int_0^y e^{it_1 y + it_2 x} \frac{(y^\alpha - x^\alpha)^{m-k-1} e^{-x^{-\alpha}}}{y^{\alpha(m-1)+1} x^{\alpha(m-k)+1}}\, dx dy,$$

откуда видно, что $f^+_{k,m}(t_1, t_2)$ соответствует плотность распределения

$$\varphi^+_{k,m}(y, x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{(k-1)!\,(m-k-1)!} \dfrac{(y^\alpha - x^\alpha)^{m-k-1} e^{-x^{-\alpha}}}{y^{\alpha(m-1)+1} x^{\alpha(m-k)+1}} & \text{при } 0 < x < y, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{16}$$

Из (14) следует, что предельное распределение величины $\left(\frac{\xi_k^{(n)}}{a_n}, \frac{\xi_m^{(n)}}{a_n}\right)$ при $n \to \infty$ имеет плотность

$$\varphi_{k,m}(y, x) = p^2 \varphi^+_{k,m}(y, x) + pq \varphi^+_{k,m}(y, -x) + pq \varphi^+_{k,m}(-y, x) + \\ + q^2 \varphi^+_{k,m}(-y, -x). \tag{17}$$

Формулы (16) и (17) получены в предположении абсолютной непрерывности функции $F(x)$; однако они справедливы для произвольной исходной функции распределения (ср. [2]).

Таким образом доказана следующая

Теорема 3. *При любых фиксированных натуральных k и m, $k < m$, и параметрах α и C, $0 < \alpha < +\infty$, $0 \leqslant c \leqslant +\infty$, нормированные крайние члены $\frac{\xi_k^{(n)}}{a_n}$ и $\frac{\xi_m^{(n)}}{a_n}$, где $a_n = (1+c)^{\frac{1}{\alpha}} \chi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$, имеют плотность предельного совместного распределения при $n \to \infty$, задаваемую формулой (17), в которой $\varphi^+_{k,m}(y, x)$ — плотность предельного совместного распределения величин $\frac{|\xi_k^{(n)}|}{a_n}$ и $\frac{|\xi_m^{(n)}|}{a_n}$ выражается (16)*

Следствие 1. *В условиях теоремы 3 имеет место предельное распределение*

$$\Phi_k(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi_k^{(n)}}{a_n} < x\right) = \begin{cases} q + p\Phi_k^+(x) & \text{при } x > 0, \\ p - p\Phi_k^+(-x) & \text{при } x < 0, \end{cases} \tag{18}$$

где $\Phi_k^+(x)$ *— предельное распределение величины* $\frac{|\xi_k^{(n)}|}{a_n}$ *при* $n \to \infty$,

$$\Phi_k^+(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(k-1)!} \displaystyle\int_{x-\alpha}^{\infty} z^{k-1} e^{-z}\, dz & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{19}$$

Следствие 2. *В условиях теоремы 3 имеет место предельное распределение*

$$\Phi_{m/k}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi_m^{(n)}}{\xi_k^{(n)}} < x\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1 \\ 2pq - 2pq\Phi_{m/k}^+(-x) & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2pq + (p^2 + q^2)\Phi_{m/k}^+(x) & \text{при } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1, \end{cases} \tag{20}$$

где $\Phi_{m/k}^+(x)$ *— предельное распределение отношения* $\frac{|\xi_m^{(n)}|}{|\xi_k^{(n)}|}$:

$$\Phi_{k/m}^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{(m-1)!}{(k-1)!\,(m-k-1)!} \displaystyle\int_0^{x^\alpha} z^{k-1}(1-z)^{m-k-1}\, dz & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1. \end{cases} \tag{21}$$

В частности, предельное распределение отношения соседних крайних членов $\frac{|\xi_{k+1}^{(n)}|}{|\xi_k^{(n)}|}$ имеет вид

$$\Phi_{(k+1)/k}^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0 \\ x^{\alpha k} & \text{при } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1 \end{cases} \tag{22}$$

или, что то же,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\xi_{k+1}^{(n)}}{\xi_k^{(n)}}\right|^{\alpha k} < x\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0. \\ x & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1. \end{cases} \tag{22'}$$

Теорема 3 и вытекающие из нее следствия не распространяются на случай $\alpha = 0$, когда никакая линейная нормировка величин $\xi_k^{(n)}$ и $\xi_m^{(n)}$ не приводит к собственному предельному совместному их распределению. В случае $\alpha = 0$ имеет смысл рассматривать совместное распределение величин $n\chi(\xi_k^{(n)})$ и $n\chi(\xi_n^{(n)})$ (ср. [1]), для которых справедлива

Теорема 4. *В обозначениях теоремы 3, требуя выполнения лишь условия* (2), *при любых фиксированных* k *и* m, $k < m$, *плотность* $\varphi_{k,m}(y, x)$

предельного совместного распределения величин $n\chi(\xi_k^{(n)})$ *и* $n\chi(\xi_m^{(n)})$ *при* $n \to \infty$ *определяется формулой*

$$\varphi_{k,m}^{*}(y,x) = \varphi_{k,m}^{*+}\left(\frac{y}{p},\frac{x}{p}\right) + \varphi_{k,m}^{*+}\left(\frac{y}{p},\frac{x}{q}\right) + \varphi_{k,m}^{*+}\left(\frac{y}{q},\frac{x}{p}\right) + \varphi_{k,m}^{*+}\left(\frac{y}{q},\frac{x}{q}\right), \tag{23}$$

где

$$\varphi_{k,m}^{*+}(y,x) = \begin{cases} \dfrac{y^{k-1}(x-y)^{m-k-1}e^{-x}}{(k-1)!\,(m-k-1)!} & \text{при } 0 < y < x, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следствие 3. *В условиях теоремы 4 при любом фиксированном натуральном* k *величина* $n\chi(\xi_k^{(n)})$ *имеет предельное распределение*

$$\Phi_k^{*}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(n\chi(\xi_k^{(n)}) < x\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(k-1)!}\left[q\displaystyle\int_0^{\frac{x}{q}} z^{k-1}e^{-z}\,dz + p\int_0^{\frac{x}{p}} z^{k-1}e^{-z}\,dz\right] & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases} \tag{24}$$

Положив в (24) $k = 1$, получим распределение, найденное в работе [1]

$$\Phi_1^{*}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(n\chi(\xi_1^{(n)}) < x\right) =$$

$$= \begin{cases} q\displaystyle\int_0^{\frac{x}{q}} e^{-z}dz + p\int_0^{\frac{x}{p}} e^{-z}dz = 1 - pe^{-\frac{x}{p}} - qe^{-\frac{x}{q}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

§ 2. Предельное совместное распределение сумм и крайних членов

В настоящем параграфе устанавливается следующая

Теорема 5. *В условиях теоремы 3 предельное совместное распределение величин* $\dfrac{S_n^{(k)}}{a_n}$ *и* $\dfrac{\xi_k^{(n)}}{a_n}$, *где*

$$S_n^{(k)} = \begin{cases} S_n - \sigma_k^{(n)} & \text{при } 0 < \alpha < 1 \\ S_n - na & \text{при } 1 < \alpha < 2, \end{cases}$$

$$\sigma_k^{(n)} = \xi_1^{(n)} + \cdots + \xi_k^{(n)}, \qquad a = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x), \qquad a_n = \begin{cases} (1+c)^{\frac{1}{\alpha}}\chi^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right) & \text{при } 0 < \alpha < 1 \\ \chi^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right) & \text{при } 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

имеет характеристическую функцию $f_k(t_1, t_2)$, *определяемую формулами: для* $0 < \alpha < 1$

$$f_k(t_1,t_2) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty} u^{k-1}e^{-\mu(t_1,\,u)}d_u\mu(t_2,u). \tag{25}$$

где

$$\mu(t, u) = u\left(pe^{itu^{-\frac{1}{\alpha}}} + qe^{-itu^{-\frac{1}{\alpha}}}\right) - it\int_0^{u^{-\frac{1}{\alpha}}}\left(pe^{itz} - qe^{-itz}\right)\frac{dz}{z^{\alpha}},$$

для $1 < \alpha < 2$

$$f_k(t_1, t_2) = \frac{f(t_1)}{(k-1)!}\int_0^{\infty}[\mu(t_1, u)]^{k-1}e^{-\mu(t_1, u)}\,d_u\mu(t_1 + t_2, u), \tag{26}$$

где

$$\mu(t, u) = \frac{\alpha}{p}\int_{u^{-\frac{1}{\alpha}}}^{\infty}\left(pe^{itz} + qe^{-itz}\right)\frac{dz}{z^{\alpha+1}},$$

$f(t_1) = \exp it_1\left[\int_0^{\infty}(e^{it_1z} - 1)\frac{dz}{z^{\alpha}} - c\int_0^{\infty}(e^{-it_1z} - 1)\frac{dz}{z^{\alpha}}\right]$ — *характеристическая функция предельного распределения величины* $\dfrac{S_n - na}{\chi^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

Доказательство. Обозначим через A_k событие, состоящее в том что $|x_l| \geqslant |x_k|$ при $1 \leqslant i \leqslant k$, $|x_i| \leqslant |x_k|$ при $k \leqslant i \leqslant n$; характеристические функции совместного и предельного совместного распределений величин $\dfrac{S_n^{(k)}}{a_n}$ и $\dfrac{\xi_k^{(n)}}{a_n}$ — соответственно через $f_k^{(n)}(t_1, t_2)$ и $f_k(t_1, t_2)$, так что $f_k(t_1, t_2) = \lim\limits_{n\to\infty} f_k^{(n)}(t_1, t_2)$.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда $S_n^{(k)} = S_n - \sigma_k^{(n)}$, $\sigma_k^{(n)} = \xi_1^{(n)} + \cdots + \xi_k^{(n)}$, $a_n = (1 + c)^{\frac{1}{\alpha}}\chi^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Аналогично тому как в § 1 было получено выражение для $f_{k,m}^{(n)}(t_1, t_2)$, будем иметь

$$f_k^{(n)}(t_1, t_2) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^{\infty}e^{it_2\frac{y}{a_n}}[\chi(y) + \chi(-y)]^{k-1}[\Psi(y)]^{n-k}\,d\chi(y) -$$

$$- \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^{\infty}e^{-it_2\frac{y}{a_n}}[\chi(y) + \chi(-y)]^{k-1}[\Psi(y)]^{n-k}\,d\chi(-y), \tag{27}$$

где

$$\Psi(y) = \int_{-y}^{y}e^{it_1\frac{x}{a_n}}\,dF(x), \quad y > 0.$$

Интегрирование по частям дает

$$\Psi(y) = 1 - \chi(y)\left[e^{it_1\frac{y}{a_n}} - \frac{it_1y}{a_n}\int_0^1 e^{it_1\frac{y}{a_n}x}\frac{\chi(xy)}{\chi(y)}\,dx\right] -$$

$$- \chi(-y)\left[e^{-it_1\frac{y}{a_n}} + \frac{it_1y}{a_n}\int_0^1 e^{-it_1\frac{y}{a_n}x}\frac{\chi(-xy)}{\chi(-y)}\,dx\right].$$

Учитывая (1), (2), (7), для $0 < c < +\infty$ и $y \to +\infty$ будем иметь

$$\Psi(y) = 1 - \chi(y)\left[\lambda_n(t_1, y) + c\lambda_n(-t_1, y) + \frac{it_1 y}{a_n} o(1)\right] =$$

$$= 1 - \chi(-y)\left[\frac{1}{c}\lambda_n(t_1, y) + \lambda_n(-t_1, y) + \frac{it_1 y}{a_n} o(1)\right], \quad (y \to +\infty), \qquad (28)$$

где

$$\lambda_n(t_1, y) = e^{it_1 \frac{y}{a_n}} - \frac{it_1 y}{a_n} \int_0^1 e^{it_1 \frac{y}{a_n} x} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

На основании соотношений (27), (28), (10), (11) получаем

$$f_k^{(n)}(t_1, t_2) = -\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int_{y_0}^{\infty} e^{it_2 [(1+c)\, n\chi(y)]^{-\frac{1}{\alpha}} [1+o(1)]} \{\chi(y)[1 + c + o(1)]\}^{k-1} \{1 - \chi(y)[\lambda_n(t_1, y) + c\lambda_n(-t_1, y) +$$

$$+ it_1 [(1+c)\, n\chi(y)]^{-\frac{1}{\alpha}} o(1)]\}^{n-k} d\chi(y) -$$

$$- \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int_{y_0}^{\infty} e^{-it_2 \left[\frac{1+c}{c} n\chi(-y)\right]^{-\frac{1}{\alpha}} [1+o(1)]} \left\{\chi(-y)\left[\frac{1+c}{c} + o(1)\right]\right\}^{k-1} \{1 -$$

$$- \frac{1}{c}\chi(-y)\left[\lambda_n(t_1, y) + c\lambda_n(-t_1, y) +$$

$$+ it_1 o(1)\left(\frac{1+c}{c} n\chi(-y)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right]\Big\}^{n-k} d\chi(-y) + o(1),$$

где y_0 — произвольно большое число, $o(1)$ под знаком интеграла при $y \to +\infty$, вне интеграла — при $n \to \infty$. Произведя замену переменных интегрирования по формулам $(1+c)\, n\chi(y) = u$ и $\frac{1+c}{c} n\chi(-y) = v$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, $y_0 \to +\infty$, получим

$$f_k(t_1, t_2) = \lim_{n\to\infty} f_k^{(n)}(t_1, t_2) =$$

$$= \frac{1}{(1+c)(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{it_2 u^{-\frac{1}{\alpha}}} u^{k-1} e^{-\frac{u}{1+c}[\lambda(t_1, u) + c\lambda(-t_1, u)]}\, du +$$

$$+ \frac{c}{1+c} \int_0^{\infty} e^{-it_2 v^{-\frac{1}{\alpha}}} v^{k-1} e^{-\frac{v}{1+c}[\lambda(t_1, v) + c\lambda(-t_1, v)]}\, dv =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} (pe^{it_2 u^{-\frac{1}{\alpha}}} + qe^{-it_2 u^{-\frac{1}{\alpha}}})\, u^{k-1} e^{-u[p\lambda(t_1, u) + q\lambda(-t_1, u)]}\, du,$$

где

$$\lambda(t_1, u) = e^{it_1 u^{-\frac{1}{\alpha}}} - it_1 u^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^1 e^{it_1 u^{-\frac{1}{\alpha}} x} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Обозначим $\mu(t, u) = u[p\lambda(t, u) + q\lambda(-t, u)]$; тогда, учитывая выражение для $\lambda(t, u)$, получим $\frac{\partial \mu}{\partial u} = pe^{itu^{-\frac{1}{\alpha}}} + qe^{-itu^{-\frac{1}{\alpha}}}$.

Откуда для характеристической функции $f_k(t_1, t_2)$ получаем окончательное выражение (25). Пусть теперь $1 < \alpha < 2$ и $f_k^{(n)}(t_1, t_2)$ — характеристическая функция совместного распределения величин $\frac{S_n^{(k)}}{a_n}$ и $\frac{\xi_k^{(n)}}{a_n}$, где $S_n^{(k)} = S_n - na$, $a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$, $a_n = \chi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$. Тогда:

$$f_k^{(n)}(t_1, t_2) = -\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} e^{-\frac{it_1 ka}{a_n}} \int\limits_0^{\infty} e^{i(t_1+t_2)\frac{y}{a_n}} \left[\int\limits_{-\infty}^{-y} e^{it_1 \frac{x}{a_n}} dF(x) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_y^{\infty} e^{it_1 \frac{x}{a_n}} dF(x)\right]^{k-1} \left[e^{-it_1 \frac{a}{a_n}} \int\limits_{-y}^{y} e^{it_1 \frac{x}{a_n}} dF(x)\right]^{n-k} d\chi(y) -$$

$$- \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} e^{-\frac{it_1 ka}{a_n}} \int\limits_0^{\infty} e^{-i(t_1+t_2)\frac{y}{a_n}} \left[\int\limits_{-\infty}^{-y} e^{it_1 \frac{x}{a_n}} dF(x) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_y^{\infty} e^{it_1 \frac{x}{a_n}} dF(x)\right]^{k-1} \left[e^{-it_1 \frac{a}{a_n}} \int\limits_{-y}^{y} e^{it_1 \frac{x}{a_n}} dF(x)\right]^{n-k} d\chi(-y).$$

Таким образом

$$f_k^{(n)}(t_1, t_2) = -nC_{n-1}^{k-1} e^{-\frac{it_1 ka}{a_n}} \int\limits_0^{\infty} e^{i(t_1+t_2)\frac{y}{a_n}} \{\Psi_{1,n}(y)\}^{k-1} \{\Psi_{2,n}(y)\}^{n-k} d\chi(y) -$$

$$- \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} e^{-\frac{it_1 ka}{a_n}} \int\limits_0^{\infty} e^{-i(t_1+t_2)\frac{y}{a_n}} \{\Psi_{1,n}(y)\}^{k-1} \{\Psi_{2,n}(y)\}^{n-k} d\chi(-y), \tag{29}$$

где

$$\Psi_{1,n}(y) = \int\limits_{-\infty}^{-y} e^{it_1 \frac{x}{a_n}} dF(x) + \int\limits_y^{+\infty} e^{it_1 \frac{x}{a_n}} dF(x), \quad y > 0,$$

$$\Psi_{2,n}(y) = e^{-\frac{it_1 a}{a_n}} \int\limits_{-y}^{y} e^{it_1 \frac{x}{a_n}} dF(x), \quad y > 0,$$

Интегрированием по частям получим:

$$\Psi_{1,n}(y) = \chi(y)\left[e^{it_1 \frac{y}{a_n}} + \frac{it_1 y}{a_n} \int\limits_1^{\infty} e^{it_1 \frac{y}{a_n} x} \frac{\chi(xy)}{\chi(y)} dx\right] +$$

$$+ \chi(-y)\left[e^{-it_1 \frac{y}{a_n}} - \frac{it_1 y}{a_n} \int\limits_1^{\infty} e^{-it_1 \frac{y}{a_n} x} \frac{\chi(-xy)}{\chi(-y)} dx\right],$$

$$\Psi_{2,n}(y) = e^{-\frac{it_1 a}{a_n}} \left\{1 - \chi(y)\left[e^{it_1 \frac{y}{a_n}} - \frac{it_1 y}{a_n} \int\limits_0^1 \left(e^{it_1 \frac{y}{a_n} x} - 1\right) \frac{\chi(xy)}{\chi(y)} dx + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{it_1 y}{a_n} \int\limits_1^{\infty} \frac{\chi(xy)}{\chi(y)} dx\right] - \chi(-y)\left[e^{-it_1 \frac{y}{a_n}} + \frac{it_1 y}{a_n} \int\limits_0^1 \left(e^{-it_1 \frac{y}{a_n} x} - 1\right) \frac{\chi(-xy)}{\chi(-y)} dx - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{it_1 y}{a_n} \int\limits_1^{\infty} \frac{\chi(-xy)}{\chi(-y)} dx\right] + \frac{it_1 a}{a_n}\right\}.$$

Учитывая (1), (2), (7) и (8), будем иметь:

$$\Psi_{1,n}(y) = \chi(y)\left[\lambda_1(t_1, y) + c\lambda_1(-t_1, y) + \frac{it_1 y\, o(1)}{a_n}\right] =$$

$$= \chi(-y)\left[\frac{1}{c}\lambda_1(t_1, y) + \lambda_1(-t_1, y) + \frac{it_1 y\, o(1)}{a_n}\right], \quad (y \to +\infty), \tag{30}$$

где

$$\lambda_1(t_1, y) = e^{it_1 \frac{y}{a_n}} + \frac{it_1 y}{a_n}\int_1^\infty e^{it_1 \frac{y}{a_n} x}\frac{dx}{x^\alpha};$$

$$\Psi_{2,n}(y) = e^{-\frac{it_1 a}{a_n}}\left\{1 - \chi(y)\left[\lambda_2(t_1, y) + c\lambda_2(-t_1, y) + \frac{it_1 y\, o(1)}{a_n}\right] + \frac{it_1 a}{a_n}\right\} =$$

$$= e^{-\frac{it_1 a}{a_n}}\left\{1 - \frac{\chi(-y)}{c}\left[\lambda_2(t_1, y) + c\lambda_2(-t_1, y) + \frac{it_1 y\, o(1)}{a_n}\right] + \frac{it_1 a}{a_n}\right\},$$

или:

$$\Psi_{2,n}(y) = 1 - \chi(y)\left[\lambda_2(t_1, y) + c\lambda_2(-t_1, y) + \frac{it_1 y\, o(1)}{a_n}\right] + O\left(\frac{t_1^2 a^2}{a_n^2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{\chi(-y)}{c}\left[\lambda_2(t_1, y) + c\lambda_2(-t_1, y) + \frac{it_1 y\, o(1)}{a_n}\right] + O\left(\frac{t_1^2 a^2}{a_n^2}\right), \quad (y \to \infty), \tag{31}$$

где

$$\lambda_2(t_1, y) = e^{it_1 \frac{y}{a_n}} - \frac{it_1 y}{a_n}\int_0^1 (e^{it_1 \frac{y}{a_n} x} - 1)\frac{dx}{x^\alpha} + \frac{it_1 y}{a_n}\cdot\frac{1}{1-\alpha}.$$

Учитывая, что

$$\frac{y}{a_n} = \frac{\chi^{-1}[\chi(y)]}{\chi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1 + o(1)}{[n\chi(y)]^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1 + o(1)}{\left[\frac{1}{c}n\chi(-y)\right]^{\frac{1}{\alpha}}}, \qquad (y \to +\infty,\ n \to \infty).$$

$$a_n^2 = \left[\chi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2 \sim n^{-\frac{2}{\alpha}}, \text{ то есть } \frac{n}{a_n^2} \sim n^{1-\frac{2}{\alpha}} = o(1), \quad (n \to \infty),$$

ибо $1 < \alpha < 2$, получим из (29), (30) и (31):

$$f_k^{(n)}(t_1, t_2) = -\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_{y_0}^\infty e^{i(t_1+t_2)[(1+o(1))n\chi(y)]^{-\frac{1}{\alpha}}}\left\{\chi(y)\left[\lambda_1(t_1, y) + c\lambda_1(-t_1, y) + \frac{it_1 o(1)}{[n\chi(y)]^{\frac{1}{\alpha}}}\right]\right\}^{k-1}\left\{1 - \chi(y)\left[\lambda_2(t_1, y) + c\lambda_2(-t_1, y) + \frac{it_1 o(1)}{[n\chi(y)]^{\frac{1}{\alpha}}}\right] + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^{n-k} d\chi(y) -$$

$$-\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_{y_0}^{\infty} e^{-i(t_1+t_2)\left[\frac{1+o(1)}{c}n\chi(-y)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}}\left\{\frac{1}{c}\chi(-y)\left[\lambda_1(t_1,y)+\right.\right.$$

$$+c\lambda_1(-t_1,y)+\left.\left.\frac{it_1 o(1)}{\left[\frac{n}{c}\chi(-y)\right]^{-\frac{1}{\alpha}}}\right]\right\}^{k-1}\left\{1-\frac{1}{c}\chi(-y)\left[\lambda_2(t_1,y)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+c\lambda_2(-t_1\,y)+\frac{it_1 o(1)}{\left[\frac{n}{c}\chi(-y)\right]^{\frac{1}{\alpha}}}\right]+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^{n-k}d\chi(-y)+o(1),$$

где y_0 — как угодно большое число, $o(1)$ под знаком интеграла при $y\to+\infty$, вне интеграла при $n\to\infty$.

Произведя в интегралах замену переменных интегрирования по формулам $u=n\chi(y)$ и $v=\frac{1}{c}n\chi(-y)$ и переходя к пределу при $n\to\infty$, $y_0\to+\infty$ получим:

$$f_k(t_1,t_2)=\lim_{n\to\infty}f_k^{(n)}(t_1,t_2)=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty}e^{i(t_1+t_2)u^{-\frac{1}{\alpha}}}\{u[\lambda_1(t_1,u)+$$

$$+c\lambda_1(-t_1u)]\}^{k-1}e^{-u[\lambda_2(t_1,u)+c\lambda_2(-t_1,u)]}du+$$

$$+\frac{c}{(k-1)!}\int_0^{\infty}e^{-i(t_1+t_2)v^{-\frac{1}{\alpha}}}\{v[\lambda_1(t_1,v)+c\lambda_1(-t_1,v)]\}^{k-1}e^{-v[\lambda_2(t_1,v)+c\lambda_2(-t_1,v)]}dv=$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty}[e^{i(t_1+t_2)u^{-\frac{1}{\alpha}}}+ce^{-i(t_1+t_2)u^{-\frac{1}{\alpha}}}]\{u[\lambda_1(t_1,u)+$$

$$+c\lambda_1(-t_1,u)]\}^{k-1}e^{-u[\lambda_2(t_1,u)+c\lambda_2(-t_1,u)]}du,$$

где

$$\lambda_1(t_1,u)=e^{it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}}+it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}\int_1^{\infty}e^{it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}x}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\alpha\int_1^{\infty}e^{it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}x}\frac{dx}{x^{\alpha+1}};\qquad(32)$$

$$\lambda_2(t_1,u)=e^{it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}}+\frac{it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha-1}-it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^1(e^{it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}x}-1)\frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

Так как

$$\int_1^{\infty}e^{it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}x}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\int_0^{\infty}(e^{it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}x}-1)\frac{dx}{x^{\alpha}}-\int_0^1(e^{it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}x}-1)\frac{dx}{x^{\alpha}}+\frac{1}{\alpha-1},$$

то

$$\lambda_2(t_1,u)=\lambda_1(t_1,u)-it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^{\infty}(e^{it_1u^{-\frac{1}{\alpha}}x}-1)\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lambda_1(t_1,u)-$$

$$-it_1u^{-1}\int_0^{\infty}(e^{itz}-1)\frac{dz}{z^{\alpha}}$$

и, следовательно,

$$f_k(t_1, t_2) = \frac{f(t_1)}{(k-1)!}\int_0^\infty [e^{i(t_1+t_2)u^{-\frac{1}{\alpha}}} + ce^{-i(t_1+t_2)u^{-\frac{1}{\alpha}}}]\{u[\lambda_1(t_1, u) + c\lambda_1(-t_1, u)]\}^{k-1} e^{-u[\lambda_1(t_1, u)+c\lambda_1(-t_1, u)]}\, du,$$

где

$$f(t_1) = \exp it_1\left[\int_0^\infty (e^{it_1 z} - 1)\frac{dz}{z^\alpha} - c\int_0^\infty (e^{-it_1 z} - 1)\frac{dz}{z^\alpha}\right].$$

Легко убедиться в том, что $f(t)$ — характеристическая функция предельного распределения величины $\frac{S_n - na}{a_n}$ при $n \to \infty$.

Обозначим

$$\mu(t, u) = u[\lambda_1(t, u) + c\lambda_1(-t, u)]. \tag{34}$$

Тогда, учитывая (32), получим:

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = e^{itu^{-\frac{1}{\alpha}}} + ce^{-itu^{-\frac{1}{\alpha}}}$$

и, следовательно, (33) можно записать в виде:

$$f_k(t_1, t_2) = \frac{f(t_1)}{(k-1)!}\int_0^\infty [\mu(t_1, u)]^{k-1} e^{-\mu(t_1, u)}\, d_u\, \mu(t_1 + t_2, u),$$

где $\mu(t, u)$ определяется равенствами (32) и (34), т. е.

$$\mu(t, u) = \frac{\alpha}{p}\int_{u^{-\frac{1}{\alpha}}}^\infty (pe^{itz} + qe^{-itz})\frac{dz}{z^{\alpha+1}}.$$

Теорема полностью доказана.

Как следствие теоремы 5 может быть получена характеристическая функция предельного распределения величины $\frac{S_n^{(k)}}{\xi_k^{(n)}}$ при $n \to \infty$.

Следствие 4. *В условиях теоремы* 5 *предельное распределение величины* $\frac{S_n^{(k)}}{\xi_k^{(n)}}$ *при* $n \to \infty$ *имеет характеристическую функцию* $f^{(k)}(t)$, *определяемую следующими соотношениями: при* $0 < \alpha < 1$

$$f^{(k)}(t) = pf_+^{(k)}(t) + qf_+^{(k)}(-t), \tag{35}$$

где

$$f_+^{(k)}(t) = \frac{1}{[p\lambda(t) + q\lambda(-t)]^k},$$

$$\lambda(t) = e^{it} - it\int_0^1 e^{itx}\frac{dx}{x^\alpha}$$

$f_+^{(k)}(t)$ — *характеристическая функция предельного распределения величины* $\frac{S_n^{(k)}}{|\xi_k^{(n)}|}$ *при* $n \to \infty$; *при* $1 < \alpha < 2$

$$f^{(k)}(t) = [p\nu_k(t) + q\nu_k(-t)]\, e^{+it}, \tag{36}$$

где

$$\nu_k(t) = \frac{[p\lambda_1(t) + q\lambda_1(-t)]^{k-1}}{[p\lambda_2(t) + q\lambda_2(-t)]^k},$$

$$\lambda_1(t) = e^{it} + it\int_1^\infty e^{itx}\frac{dx}{x^\alpha} = \alpha\int_1^\infty e^{itx}\frac{dx}{x^{\alpha+1}},$$

$$\lambda_2(t) = e^{it} - it\int_0^1 (e^{itx} - 1)\frac{dx}{x^\alpha} + \frac{it}{\alpha - 1},$$

характеристическая функция $f_+^{(k)}(t)$ *предельного распределения величины* $\frac{S_n^{(k)}}{|\xi_k^{(n)}|}$ *при* $n \to \infty$ *будет при этом*

$$f_+^{(k)}(t) = \nu_k(t)\,[pe^{it} + qe^{-it}]. \tag{37}$$

§ 3. О стохастическом порядке роста остатка при замене суммы S_n суммой $\sigma_k^{(n)}$ крайних членов

В работах Дарлинга [1] и Боброва [2] доказано, что при $\alpha = 0$ и любом натуральном p имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left(\frac{S_n}{\xi_1^{(n)}} - 1\right)^p = 0.$$

Отсюда как следствие получаем

$$S_n = \xi_1^{(n)} + o(1)\,\xi_1^{(n)} \qquad (n \to \infty),$$

где $o(1)$ стремится по вероятности к нулю при $n \to \infty$. Мы обобщим этот результат, доказав следующую теорему

Теорема 6. *В условиях теоремы 3 при* $\alpha = 0$ *и любых фиксированных натуральных* k *и* p *имеет место предельное соотношение:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left(\frac{S_n - \sigma_k^{(n)}}{\xi_k^{(n)}}\right)^p = 0 \tag{38}$$

Доказательство теоремы проведем для случая $p = 2$. Аналогично теорема доказывается для любого натурального p.

Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, получаем:

$$\mathbf{M}\left[\frac{S_n - \sigma_k^{(n)}}{\xi_k^{(n)}}\right]^2 = \mathbf{M}_{A_k}\left[\frac{S_n - \sigma_k^{(n)}}{\xi_k^{(n)}}\right]^2 = -\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^\infty [\chi(y) +$$

$$+ \chi(-y)]^{k-1}\frac{1}{y^2}\left\{(n-k)\int_{-y}^{y} x^2\,dF(x)\left[\int_{-y}^{y} dF(x)\right]^{n-k-1} +\right.$$

$$\left. + (n-k)(n-k-1)\left[\int_{-y}^{y} x\,dF(x)\right]^2\left[\int_{-y}^{y} dF(x)\right]^{n-k-2}\right\} d\chi(y) -$$

$$-\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^\infty [\chi(y)+\chi(-y)]^{k-1}\frac{1}{y^2}\times$$

$$\times\left\{(n-k)\int_{-y}^{y}x^2\,dF(x)\left[\int_{-y}^{y}dF(x)\right]^{n-k-1}+\right.$$

$$\left.+(n-k)(n-k-1)\left[\int_{-y}^{y}x\,dF(x)\right]^2\left[\int_{-y}^{y}dF(x)\right]^{n-k-2}\right\}d\chi(-y)=$$

$$=-\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\int_0^\infty[\chi(y)+\chi(-y)]^{k-1}[1-\chi(-y)-$$

$$-\chi(y)]^{n-k-1}\frac{1}{y^2}\int_{-y}^{y}x^2\,dF(x)\,d[\chi(y)+\chi(-y)]-$$

$$-\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k-2)!}\int_0^\infty[\chi(y)+\chi(-y)]^{k-1}[1-\chi(y)-$$

$$-\chi(-y)]^{n-k-2}\left[\frac{1}{y}\int_{-y}^{y}x\,dF(x)\right]^2 d[\chi(y)+\chi(-y)]=I_1^{(n)}+I_2^{(n)}.$$

В [2] было показано, что в рассматриваемом случае

$$\frac{1}{y^2}\int_{-y}^{y}x^2\,dF(x)=[\chi(y)+\chi(-y)]\,o(1)\qquad(y\to+\infty);\tag{39}$$

$$\left|\frac{1}{y}\int_{-y}^{y}x\,dF(x)\right|\leqslant[\chi(y)+\chi(-y)]\,o(1)\qquad(y\to+\infty).\tag{40}$$

Выбирая для произвольно малого $\varepsilon>0$ число y_0 с расчетом, чтобы в (39) и (40) $|o(1)|<\varepsilon$ при $y>y_0$, получим:

$$I_1^{(n)}=-\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left\{\int_0^{y_0}+\int_{y_0}^{\infty}\right\}<\frac{n!\,[F(y_0)-F(-y_0)]^{n-k}}{(k-1)!\,(n-k)!}+$$

$$+\varepsilon\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\int_0^1(1-u)^k u^{n-k-1}\,du=k\varepsilon+o(1)\qquad(n\to\infty);$$

$$|I_2^{(n)}|=\left|-\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k-2)!}\left\{\int_0^{y_0}+\int_{y_0}^{\infty}\right\}\right|<\frac{n!\,[F(y_0)-F(-y_0)]^{n-k-1}}{(k-1)!\,(n-k-1)!}+$$

$$+\varepsilon\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k-2)!}\int_0^1(1-u)^{k+1}u^{n-k-2}\,du=\varepsilon(k+1)k+o(1)\qquad(n\to\infty).$$

Таким образом, при любом $\varepsilon>0$

$$\mathbf{M}\left[\frac{S_n-a_k^{(n)}}{\xi_k^{(n)}}\right]^2<\varepsilon(k+2)k+o(1)\qquad(n\to\infty),$$

что дает

$$\mathbf{M}\left[\frac{S_n-a_k^{(n)}}{\xi_k^{(n)}}\right]^2\to 0\qquad(n\to\infty).$$

Теорема доказана.

Следствие 5. *В условиях теоремы* 6 *имеет место соотношение*:

$$S_n = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots + \xi_k^{(n)} + o(1)\,\xi_k^{(n)}, \tag{41}$$

где $o(1)$ *стремится по вероятности к нулю при* $n \to \infty$.

Из следствия теоремы 5 видно, что в случае, когда $0 < \alpha < 1$, величина $\dfrac{S_n - \sigma_k^{(n)}}{\xi_k^{(n)}}$ имеет собственное предельное распределение при $n \to \infty$, а потому теорема 6 на этот случай не распространяется. Однако справедлив следующая

Теорема 7. *В условиях теоремы* 3 *при* $0 < \alpha < 1$, *если* $k_n \to \infty$ *и* $\dfrac{k_n \ln n}{n} \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и случайные величины последовательности* $\{x_i\}$ *являются неотрицательными, имеет место предельное соотношение*:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left[\frac{S_n - \sigma_{k_n}^{(n)}}{k_n \xi_{k_n}^{(n)}} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right]^2 = 0. \tag{42}$$

Доказательство: В ранее введенных обозначениях имеем:

$$\mathbf{M}\left[\frac{S_n - \sigma_{k_n}^{(n)}}{k_n \xi_{k_n}^{(n)}} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right]^2 = \mathbf{M}_{A_{k_n}}\left[\frac{S_n - \sigma_{k_n}^{(n)}}{k_n \xi_{k_n}^{(n)}} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right]^2 =$$

$$= -\frac{n!}{(k_n-1)!\,(n-k_n)!}\int_0^\infty \chi(y)^{k_n-1}\frac{1}{k_n^2 y^2}\left\{(n-k_n)\int_0^y x^2\,dF(x)\left[\int_0^y dF(x)\right]^{n-k_n-1}\right.$$

$$\left. + (n-k_n)(n-k_n-1)\left[\int_0^y x\,dF(x)\right]^2\left[\int_0^y dF(x)\right]^{n-k_n-2}\right\} d\chi(y) +$$

$$+ \frac{2\alpha}{1-\alpha}\frac{n!}{(k_n-1)!\,(n-k_n)!}\int_0^\infty [\chi(y)]^{k_n-1}\frac{n-k_n}{k_n y}\int_0^y x\,dF(x)\left[\int_0^y dF(x)\right]^{n-k_n-1} d\chi(y) +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} = -\frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-1)!\,k_n}\int_0^\infty [\chi(y)]^{k_n-1}[1-\chi(y)]^{n-k_n-1}\times$$

$$\times\frac{1}{y^2}\int_0^y x^2\,dF(x)\,d\chi(y) - \frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-2)!\,k_n}\int_0^\infty [\chi(y)]^{k_n-1}[1-\chi(y)]^{n-k_n-2}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{y}\int_0^y x\,dF(x)\right]^2 d\chi(y) + \frac{2\alpha}{1-\alpha}\,\frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-1)!}\int_0^\infty [\chi(y)]^{k_n-1}[1-\chi(y)]^{n-k_n-1}\times$$

$$\times\frac{1}{y}\int_0^y x\,dF(x)\,d\chi(y) + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} = I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + I_3^{(n)} + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}.$$

Интегрированием по частям получаем:

$$\frac{1}{y^2}\int_0^y x^2\,dF(x) = \chi(y)\left[-1 + 2\int_0^1 x\frac{\chi(xy)}{\chi(y)}\,dx\right],$$

$$\frac{1}{y}\int_0^y x\,dF(x) = \chi(y)\left[-1 + \int_0^1 \frac{\chi(xy)}{\chi(y)}\,dx\right].$$

Учитывая (1), отсюда получим:

$$\frac{1}{y^2}\int_0^y x^2 dF(x) = \chi(y)\left[\frac{\alpha}{2-\alpha} + o(1)\right], \quad (y \to +\infty).$$
$$\frac{1}{y}\int_0^y x dF(x) = \chi(y)\left[\frac{\alpha}{1-\alpha} + o(1)\right] \quad (y \to +\infty). \tag{43}$$

В связи с (43) и тем, что $0 < \chi(y) < 1$, $0 < \frac{1}{y^2}\int_0^y x^2 dF(x) < 1$ и $0 < \frac{1}{y}\int_0^y x dF(x) < 1$ для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого y_0, зависящего от ε, будем иметь:

$$I_1^{(n)} = -\frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-1)!\,k_n}\left\{\int_0^{y_0} + \int_{y_0}^{\infty}\right\} < \frac{n!\,[F(y_0)]^{n-k_n}}{k_n!\,(n-k_n)!\,k_n} +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} + \varepsilon\right)\frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-1)!\,k_n}\int_0^1 u^{k_n}(1-u)^{n-k_n-1}du =$$

$$= \frac{n!\,[F(y_0)]^{n-k_n}}{k_n!\,(n-k_n)!\,k_n} + \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} + \varepsilon\right)\frac{1}{k_n};$$

$$I_2^{(n)} = \frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-2)!\,k_n}\left\{\int_0^{y_0} + \int_{y_0}^{\infty}\right\} < \frac{n!\,[F(y_0)]^{n-k_n-1}}{k_n!\,(n-k_n-1)!\,k_n} +$$

$$+ \left[\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} + \varepsilon\right]\frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-2)!\,k_n}\int_0^1 u^{k_n+1}(1-u)^{n-k_n-2}du <$$

$$< \frac{n!\,[F(y_0)]^{n-k_n}}{k_n!\,(n-k_n-1)!\,k_n} + \left[\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} + \varepsilon\right]\frac{k_n+1}{k_n};$$

$$I_3^{(n)} = \frac{2\alpha}{1-\alpha}\,\frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-1)!}\left\{\int_0^{y_0} + \int_{y_0}^{\infty}\right\} <$$

$$< \frac{2\alpha}{1-\alpha}\,\frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-1)!}\left\{\int_0^{y_0}[\chi(y)]^{k_n-1}[1-\chi(y)]^{n-k_n-1}\frac{1}{y}\int_0^y x\,dF(x)\,d\chi(y) +\right.$$

$$+ \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} - \varepsilon\right]\int_0^{\infty}[\chi(y)]^{k_n}[1-\chi(y)]^{n-k_n-1}d\chi(y) -$$

$$\left. - \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} - \varepsilon\right]\int_0^{y_0}[\chi(y)]^{k_n}[1-\chi(y)]^{n-k_n-1}d\chi(y)\right\} <$$

$$< -\frac{2\alpha}{1-\alpha}\,\frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-1)!}\left[\frac{\alpha}{1-\alpha} - \varepsilon\right]\int_0^1 u^{k_n}(1-u)^{n-k_n-1}du + I_3'^{(n)} =$$

$$= -\frac{2\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - \varepsilon\right) + I_3'^{(n)},$$

где

$$|I_3^{'(n)}| = \frac{2\alpha}{1-\alpha}\,\frac{n!}{k_n!\,(n-k_n-1)!}\left|\int_0^{y_0}[\chi(y)]^{k_n-1}[1-\chi(y)]^{n-k_n-1}\left\{\frac{1}{y}\int_0^y x\,dF(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - \varepsilon\right)\chi(y)\right\} d\chi(y)\right| < \frac{2\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \varepsilon\right)\frac{n!\,[F(y_0)]^{n-k_n}}{k_n!\,(n-k_n)!}$$

Имеем далее:

$$\frac{n!}{(n-k_n-1)!}[F(y_0)]^{n-k_n} < n^{k_n+1}[F(y_0)]^{n-k_n}; \qquad (44)$$

$$\ln n^{k_n+1}[F(y_0)]^{n-k_n} = (k_n+1)\ln n + (n-k_n)\ln F(y_0) =$$

$$= n\left[\frac{k_n \ln n}{n} - \frac{k_n}{n}\ln F(y_0) + \frac{\ln n}{n} + \ln F(y_0)\right].$$

По условию теоремы $\frac{k_n \ln n}{n} \to 0$, а, следовательно, и $\frac{k_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Учитывая при этом, что $\frac{\ln n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ и $\ln F(y_0) < 0$, получаем:

$$\ln n^{k_n+1}[F(y_0)]^{n-k_n} \to -\infty \quad (n \to \infty).$$

Поэтому, согласно (44), будем иметь:

$$\frac{n!}{(n-k_n-1)!}[F(y_0)]^{n-k_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

и, следовательно,

$$I_1^{(n)} < \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} + \varepsilon\right)\frac{1}{k_n} + o(1) \quad (n \to \infty),$$

$$I_2^{(n)} < \left[\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} + \varepsilon\right]\frac{k_n+1}{k_n} + o(1) \quad (n \to \infty),$$

$$I_3^{(n)} < -\frac{2\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} - \varepsilon\right) + o(1) \quad (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \mathbf{M}\left[\frac{S_n - \sigma_{k_n}^{(n)}}{k_n \xi_{k_n}^{(n)}} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right]^2 = I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + I_3^{(n)} + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} < \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} -$$

$$- \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\varepsilon + \left[\frac{\alpha}{2-\alpha} + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} + 2\varepsilon\right]\frac{1}{k_n} + o(1) \quad (n \to \infty).$$

Учитывая, что $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$, окончательно получаем:

$$0 \leqslant \mathbf{M}\left[\frac{S_n - \sigma_{k_n}^{(n)}}{k_n \xi_{k_n}^{(n)}} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right]^2 < \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\varepsilon + o(1) \quad (n \to \infty).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда будем иметь:

$$\mathbf{M}\left[\frac{S_n - \sigma_{k_n}^{(n)}}{k_n \xi_{k_n}^{(n)}} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right]^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Следствие 6. *В условиях теоремы 7 имеет место соотношение:*

$$S_n = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots + \xi_{k_n}^{(n)} + \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} + o(1)\right] k_n \xi_{k_n}^{(n)}, \tag{45}$$

где $o(1)$ *стремится по вероятности к нулю при* $n \to \infty$. *Для случая* $1 < \alpha < 2$ справедлива следующая

Теорема 8. *В условиях теоремы 7 при* $1 < \alpha < 2$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left[\frac{\sigma_{k_n}}{k_n \xi_{k_n}^{(n)}} - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\right]^2 = 0, \tag{46}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left[\frac{S_n - na}{k_n \xi_{k_n}^{(n)}}\right]^2 = 0. \tag{47}$$

Сформулированная теорема доказывается так же, как и теорема 7.

Из теоремы 8 вытекает

Следствие 7. *В условиях теоремы 8 имеют место следующие соотношения:*

$$\sigma_{k_n}^{(n)} = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots + \xi_{k_n}^{(n)} = \frac{\alpha + o(1)}{\alpha - 1} k_n \xi_{k_n}^{(n)}, \tag{48}$$

$$S_n = na + o(1)\, k_n \xi_{k_n}^{(n)} = na + o(1)\, \sigma_{k_n}^{(n)}, \tag{49}$$

где $o(1)$ *стремится по вероятности к нулю при* $n \to \infty$.

Поступила в редакцию
10.11.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. А. Дарлинг, Влияние максимального члена при суммировании независимых случайных величин, Trans. of the Amer. Math. Soc., **73**, 1 (1952), 95—107.

[2] А. А. Бобров, Рост максимального слагаемого в сумме независимых случайных величин, Мат. сб. Киевского госуниверситета, 5, (1954), 15—38.

[3] Б. В. Гнеденко, О роли максимального слагаемого при суммировании независимых случайных величин, Укр. матем. ж., 5, 3, (1953), 291—298.

[4] Н. В. Смирнов, Предельные законы распределения для членов вариационного ряда, Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова, XXV, (1949), 1—60.

THE EXTREME MEMBERS OF SAMPLE AND THEIR ROLE IN THE SUM OF THE INDEPENDENT VARIABLES

D. Z. AROV, A. A. BOBROV *(ODESSA)*

(Summary)

Let

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{1}$$

be independent random variables, whose distribution function $F(x)$ (the same for all x_i) satisfies the conditions of *regularity of growth* for $|x| \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\chi(kx)}{\chi(x)} = \frac{1}{k^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\chi(-x)}{\chi(x)} = c, \quad 0 \leqslant c \leqslant +\infty,$$

where

$$\chi(x) = 1 - F(x) \text{ for } x > 0 \text{ and } \chi(x) = F(x) \text{ for } x < 0.$$

If

$$\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_{(n)}^{(n)} \tag{2}$$

are the same random variables (1), which are written in descending order of their modules $|\xi_1^{(n)}| \geqslant |\xi_2^{(n)}| \geqslant \ldots \geqslant |\xi_n^{(n)}|$, then $\xi_k^{(n)}$ for a given index $k < n$ is called the *extreme member* of (2), and the index k is called *its ordinal number*.

The density of the joint limit distribution (for $n \to \infty$) of two properly normed extreme members $\xi_k^{(n)}$ and $\xi_m^{(n)}$ is established in § 1 and appropriate limit distributions for the ratio $\xi_k^{(n)}/\xi_m^{(n)}$ and other values are obtained. In § 2 we find the joint limit distribution of a properly normed extreme member $\xi_k^{(n)}$ and the sum

$$S_n^{(k)} = \begin{cases} \xi_{k+1}^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)} & \text{for } 0 < \alpha < 1, \\ \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)} & \text{for } 1 < \alpha < 2, \ a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x). \end{cases}$$

As a result, a limit distribution for $S_n^{(k)}/\xi_k^{(n)}$ is obtained. The method thus developed and the results obtained in § 1 and 2 are applied in § 3 in a more thorough study of the role of the extreme members in the sum $S_n = x_1 + \ldots + x_n = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$. Hence the total value of the first k major members $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}$ in the sum S_n will be determined. The result obtained may be expressed as follows:

for $\alpha = 0$ $\quad S_n = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_k^{(n)} + o(1)\,\xi_k^{(n)}$,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{for } 0 < \alpha < 1 & S_n = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_{k_n}^{(n)} + \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha} + o(1)\right) k_n \xi_{k_n}^{(n)} \\ \text{for } 1 < \alpha < 2 & S_n = n\alpha + o(1)\, k_n \xi_{k_n}^{(n)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} k_n \to \infty \\ k_n = o\left(\dfrac{n}{\ln n}\right), \end{array}$$

where $o(1)$ tends in probability to 0 when $n \to \infty$.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
V Том И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1960

О РАБОТАХ Н. В. СМИРНОВА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

(к шестидесятилетию со дня рождения)

17 октября этого года исполнилось 60 лет со дня рождения члена-корреспондента АН СССР, профессора Николая Васильевича Смирнова, крупнейшего советского специалиста по математической статистике.

За последние 30 лет Николай Васильевич написал более сорока научных работ, большинство из них представляет собой крупные, совершенно оригинальные исследования по математической статистике, теории вероятностей и их приложениям.

Первая группа работ Николая Васильевича посвящена так называемым непараметрическим задачам, в эту группу входят работы [4, 6, 8, 10, 12, 13, 21, 22, 24, 37].

Уже первые работы [4, 6] этого цикла, посвященные распределению критерия ω^2 — Мизеса, отличаются своей законченностью, точностью и мастерством, с которым в них преодолены значительные принципиальные и вычислительные трудности. Характеристическая функция предельного закона получила простое и изящное выражение через определитель Фредгольма вспомогательного интегрального уравнения с симметрическим ядром, целиком определяемым конкретным видом критерия (выбором положительной функции $g(t)$. Сам же предельный закон представлен в виде ряда; члены ряда есть определенные интегралы, пределами интегрирования которых служат собственные числа ядра. Из этих выражений непосредственно следует, что предельный закон не зависит от вида закона распределения генеральной совокупности.

В работе [8], посвященной уклонениям эмпирической кривой, весьма тонкие оценки и остроумные способы точного вычисления многомерных интегралов, распространенных на сложные области, позволяют автору доказать ряд теорем, исчерпывающих вопрос о виде предельных законов. В частности, в этой работе найдено простое асимптотическое выражение для распределения односторонних уклонений $D_n^+ = \sup_x [F_n(x) - F(x)]$ эмпирической функции распределения $F_n(x)$ от теоретической $F(x)$:

$$\mathbf{P}\left(D_n^+ > \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) \sim e^{-2\lambda^2}.$$

Приведенные замечания о характере и стиле работ [6] и [8] относятся ко всем, без исключения, исследованиям Николая Васильевича, отмеченным в настоящем обзоре.

НИКОЛАЙ ВАСИЛЬЕВИЧ СМИРНОВ

По степени трудности решенных задач их можно сравнить лишь со знаменитым доказательством центральной предельной теоремы методом моментов, выполненным академиком А. А. Марковым.

Аналитические методы, которыми пользуется Николай Васильевич при решении этих задач своеобразны и тонки и в ряде случаев сводятся к изучению асимптотического поведения n-кратных интегралов, распространенных на области, ограниченные множеством поверхностей, число которых растет по мере роста n.

Можно с уверенностью утверждать, что по силе методов, применяемых Николаем Васильевичем при оценке многомерных интегралов и вычислении многократных сумм, ему принадлежит ведущее место в современной математике *.

Не имея возможности останавливаться на рассмотрении каждой работы, остановимся лишь на тех, которые получили наибольшую известность среди советских и зарубежных специалистов.

Работа [10], посвященная оценке расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках, получила, пожалуй, наибольшую и вполне заслуженную известность из работ этого цикла.

В этой работе получен весьма важный критерий оценки гипотезы о том, что две выборки произведены из одной генеральной совокупности. Предельный закон распределения соответствующей статистики содержит лишь один параметр, не зависит от вида непрерывного закона генеральной совокупности, и при этом оказывается таким же, как предельный закон $K(\lambda)$, найденный ранее А. Н. Колмогоровым для уклонений эмпирического распределения от теоретического.

В работе приведены таблицы функции $K(\lambda)$, позволяющие широко применять этот критерий (получивший в мировой статистической литературе наименование — «критерий Смирнова») на практике. Указанные таблицы были в 1948 году перепечатаны за границей (см. работу [16]).

Ко второй группе работ можно отнести работы [3, 5, 19] и [25], посвященные исследованию свойств членов вариационного ряда. Исследования автора, связанные с вариационным рядом, начатые им в 1935—1937 годах (работы [3] и [5]), завершились монографией [19], вышедшей отдельным изданием Трудов Математического института им. В. А. Стеклова в 1949 году. В этой последней работе получены исчерпывающие результаты о предельных законах средних членов вариационного ряда (отношение рангового номера которых к числу членов сохраняет постоянное значение), а также перечислены все возможные типы предельных законов для последовательностей крайних членов с постоянным ранговым номером (см. теорему 5 второй части работы [19]). Найдены, также, области притяжения всех предельных типов законов.

Ряд работ этих двух циклов (опубликованных до 1950 года), в том числе и работа [19], в 1950 году были отмечены Сталинской премией.

Работа [19] была переведена на английский язык и вышла в 1952 г

---

* См.: статью А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина о работах Н. В. Смирнова, удостоенных Сталинской премии, УМН, том VI, вып. 4(44), 1951, 190—192.

в серии переводов Американского математического общества (см. работу [25]).

Цикл работ по теории вероятностей, включающий работы [2, 7, 9, 20], по трудности и важности решенных в них задач не уступает работам первых двух циклов, а работа [7], о числе перемен знака в последовательности уклонений, широко используется автором в его работах по математической статистике.

Следует остановиться на работе [11] — «Об оценке максимального члена в ряду наблюдений», эта работа, опубликованная в виде небольшой заметки в «Докладах АН СССР» в конце 1941 года, долгое время оставалась незамеченной за границей. Через 9 лет, в 1950 году американские ученые, занимаясь аналогичными задачами, предприняли громоздкие вычисления 32-х мерных интегралов на современных электронных машинах для составления важных для приложений таблиц. Аналогичные по точности и объему таблицы получены в работе [11] совсем простыми вычислительными средствами, благодаря выведенным там рекуррентным соотношениям.

Все крупные специалисты по математической статистике, заинтересованные в практических приложениях статистических теорий, уделяли много времени и сил составлению и изданию различных таблиц (можно указать, например, на большую работу, проделанную в этом направлении Пирсоном в Англии и Е. Е. Слуцким в СССР). Николай Васильевич уделяет этой важной и трудоемкой работе большое внимание.

Мы уже указывали на важность составленных им оригинальных таблиц, содержащихся в работах [10, 11]; в настоящее время под руководством Николая Васильевича печатаются крупные таблицы функций и интегралов, необходимых для приложений статистики (см. работы [31, 32, 39]).

Недавно вышедшие книги [27, 38], соавтором которых является Н. В. Смирнов, представляют собой вполне современное и достаточно полное изложение основ теории вероятностей и математической статистики в технике, книги [27, 38] тоже содержат ряд весьма полезных и важных таблиц. Нельзя не упомянуть, наконец, о работе [23], содержащей две важных теоремы о преобразованиях Лапласа.

Заканчивая этот весьма беглый обзор математических работ Николая Васильевича, сделаем еще несколько замечаний, характеризующих объем его столь плодотворной научной деятельности.

Математические работы Николая Васильевича носят фундаментальный характер, число ссылок на них, число новых работ и диссертаций примыкающий к работам Николая Васильевича, непрерывно растет. Можно отметить, например, исследования в следующих направлениях: а) отыскание предельных распределений статистик, являющихся видоизменениями статистик, рассмотренных Николаем Васильевичем (И. И. Гихман, Г. Х. Мания, А. Реньи, Е. Л. Рвачева, С. Х. Туманян и др.), б) изучение вероятностей больших уклонений (последние работы самого Николая Васильевича, работы А. А. Боровкова и др.), в) оценка скорости сходимости в предельных теоремах исследованных Николаем Васильевичем (В. С. Королюк, и др.).

В настоящее время Н. В. Смирнов является главой советской статистической школы и в связи с этим ведет большую организационную и научно-методическую работу.

Николай Васильевич является редактором Отдела теории вероятностей и математической статистики Реферативного журнала, возглавляет недавно созданный в Математическом Институте им. В. А. Стеклова АН СССР Отдел математической статистики и руководит научно-исследовательским семинаром этого отдела, издает математические таблицы и систематически рецензирует новинки статистической литературы.

Точные и изящные исследования Николая Васильевича служат примером для молодых математиков, учеников Николая Васильевича, воспитанию которых он уделял большое внимание за долгие годы своей педагогической деятельности в Московском университете и в Московском педагогическом институте им. Ленина.

Пожелаем же Николаю Васильевичу в день его шестидесятилетия здоровья и долгих лет жизни и творческой работы.

Б. В. Гнеденко,
А. Н. Колмогоров, Ю. В. Прохоров,
О. В. Сарманов

СПИСОК РАБОТ НИКОЛАЯ ВАСИЛЬЕВИЧА СМИРНОВА

[1] О некоторых случаях экстремальных значений среднего квадратического, Вестник статистики, № 3—4, 1929.
[2] О вероятностях больших уклонений, Матем. сб., **40**, 4 (1933), 443—454.
[3] Über die Verteilung des allgemeinen Glides in der Variationsreihe, Metron, XII, 2 (1935), 59—81.
[4] Sur la distribution de ω^2 (Griterium de M. v. Mises), Comptes Rendus Acad. Sci., 202 (1936), 449—452.
[5] О зависимости членов вариационного ряда, М., Бюллетень МГУ, Сер. А, **1**, 4 (1937), 1—12.
[6] О распределении ω^2-критерия Мизеса. Матем. сб., нов. сер., 2 (44), 5 (1937), 973—993.
[7] О числе перемен знака в последовательности уклонений, Изв. АН СССР, сер. матем. 3 (1937), 361—372.
[8] Об уклонениях эмпирической кривой распределения, Матем. сб., **6** (**48**), 1, (1939), 3—26.
[9] Об одной предельной теореме в схеме независимых испытаний, Изв. АН СССР, сер. матем., 3 (1939), 319—328.
[10] Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках, М., Бюллетень МГУ, **2**, 2 (1939), 1—16.
[11] Об оценке максимального члена в ряду наблюдений, ДАН СССР, **33**, 5 (1941), 346—350.
[12] Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, УМН, **10** (1944), 179—206.
[13] О критерии симметрии закона распределения случайной величины, ДАН СССР, **56**, 1 (1947), 13—16.
[14] Полиномы Чебышева и математическая статистика (рецензия), Советская книга, № 7, 1947.
[15] Евгений Евгеньевич Слуцкий (некролог), Изв. АН СССР, сер. матем., 12 (1948).
[16] Table for estimating goodness of fit of empirical distribution (перепеч. из работы 10), Ann. of Math. Stat., 19, 1948.

[17] Математическая статистика, сб. «Математика в СССР за 30 лет» (1917—1947), 1948, 728—738.
[18] Романовский В. И. «Применение математической статистики в опытном деле» (рецензия), Советская книга, № 5, 1948.
[19] Предельные законы распределения для членов вариационного ряда, Труды Матем. ин-та им. Стеклова, **25**, (1949), 1—60.
[20] О распределении числа циклов в циклирующих системах, УМН, 4 : 4 (32), (1949), 192—193.
[21] О критерии Крамера-Мизеса, УМН, 4 : 4 (32), (1949), 196—197.
[22] О построении доверительной области для плотности распределения случайной величины, ДАН СССР, **74**, 2 (1950), 189—191.
[23] О преобразованиях Лапласа (дополнение к книге Б. В. Гнеденко «Курс теории вероятностей», стр. 335—339), 1950.
[24] О приближении плотностей распределения случайных величин, Уч. записки Моск. гор. пединститута им. В. П. Потемкина, 3, 1951, 69—96.
[25] Limit distributions for the terms of variational series, Am. Math. Soc. Transl. Numb., 67 (1952), 1—64 (перевод работы 19).
[26] Об одном способе построения доверительной области для нормальной функции по данным выборки, Труды ин-та матем. и мех. АН Узб.ССР, **10**, 1 (1953), 122—130.
[27] Теория вероятностей и математическая статистика в технике (совм. с И. В. Дунин-Барковским), ГИТТЛ, 1955, 1—556.
[28] О статистической оценке переходных вероятностей в цепях Маркова. Вестн. Ленингр. ун-та, 11, (1955), 45—48.
[29] Hansen, Hurwitz, Madow, Sample survey methods and theory, N. Y., **1—2**, 1953. (рецензия). Бюллетень. Новые книги за рубежом, 1, (1955), 57—61.
[30] Отклик на статью проф. Афончикова А. Ф. «Ошибки в инструкции по техконтролю», Текстильная промышленность, 6, 1956.
[31] Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и ее нормированных производных, (введение), 1957, (в печати).
[32] Таблицы функций распределения и плотностей распределения Стьюдента. (Введение), 1957) (в печати).
[33] Фишер Рональд, Статья для БСЭ, том 45, 1957.
[34] Saxer. Versicherungs mathematik, Teil I, Berlin, 1957 (рецензия), Бюл. Новые книги за рубежом, сер. А. 7, (1957), 12—13.
[35] Colloque sur l'analyse statistique. Tenu à Bruxelles 15—17 déc. 1954 (рецензия). Бюл. Новые книги за рубежом, сер. Н, 9, (1957), 8—11.
[36] Siegel. Nonparametric statistics for the behavioral sciences. N. Y. 1956 (рецензия). Бюл. Новые книги за рубежом, сер. А, 3, (1958), 19—21.
[37] Непараметрические методы статистики (совместно с И. И. Гихманом и Б. В. Гнеденко), Тр. 3-го Всесоюзного матем. съезда, **3**, 1958, 320—334.
[38] Краткий курс математической статистики для технических приложений (совместно с И. В Дунин-Барковским), Физматгиз, 1959, 1—436.
[39] Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения (совм. с Л. Н. Большевым), 1959 (в печати).
[40] Асимптотическая мощность некоторых непараметрических критериев, Труды Всесоюзн. совещ. по теории вероятн. и матем. статистике, Ереван, 1960, 98—100.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1690

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Е. Б. ДЫНКИН

Следуя [1], мы понимаем марковский процесс как набор элементов $X = (x_t, \zeta, \mathcal{M}_t^s, \mathbf{P}_{s,x})$ $(x_t = x_t(\omega)\ (0 \leqslant t < \zeta(\omega)) —$ траектория процесса, отвечающая элементарному событию ω; $\zeta = \zeta(\omega)$ — момент обрыва; $\mathcal{M}_t^s$ — совокупность событий, наблюдаемых за время $[s, t]$; $\mathbf{P}_{s,x}(A)$ — вероятность A, если в момент s траектория находилась в точке x). Стохастический интеграл

$$\int_s^t \Phi(u, \omega)\, dx_u \qquad (1)$$

определяется по отношению к некоторой вероятностной мере $\mathbf{P}_{s,x}$ и поэтому существенно зависит от x. В настоящей заметке исследуются условия, при которых значения интеграла (1) можно выбрать не зависящими от x. Полученные при этом результаты используются для построения с помощью стохастических интегралов аддитивных функционалов от марковских процессов.

В начале заметки доказывается одна общая теорема об аддитивных функционалах. В дальнейшем рассматриваются стохастические интегралы, связанные с n-мерным винеровским процессом, хотя результаты нетрудно было бы распространить и на другие марковские процессы, для которых определено понятие стохастического интеграла.

1. Пусть $X = (x_t, \zeta, \mathcal{M}_t^s, \mathbf{P}_{s,x})$ — марковский процесс в фазовом пространстве $(E, \mathcal{B})$. Не ограничивая общности (см. [1], $n°2.2$), мы всегда можем считать, что σ-алгебры $\mathcal{M}^s$, на которых определены меры $\mathbf{P}_{s,x}$, являются полными по совокупности этих мер (т. е. $A \in \mathcal{M}^s$, если для каждого $x \in E$ найдутся B_1, B_2 из $\mathcal{M}^s$ такие, что $B_1 \subseteq A \subseteq B_2$ и $\mathbf{P}_{s,x}(B_1) = \mathbf{P}_{s,x}(B_2)$). Определим σ-алгебры $\overline{\mathcal{M}}_t^s$, $\mathcal{N}^s$ и $\overline{\mathcal{N}}^s$ так же, как это сделано в $n°$ 2.2 и 2.4 книги [1]. Именно, положим $A \in \overline{\mathcal{M}}_t^s$, если $A \in \mathcal{M}^s$, $A \subseteq \Omega_t = \{\omega : \zeta(\omega) > t\}$ и для каждого x существует $B \in \mathcal{M}_t^s$, такое, что $\mathbf{P}_{s,x}(A\overline{B}) = \mathbf{P}_{s,x}(B\overline{A}) = 0$. Обозначим через $\mathcal{N}^s$ σ-алгебру, порожденную множествами $\{\omega : x_u \in \Gamma\}$ $(u \geqslant s,\ \Gamma \in \mathcal{B})$, и положим $A \in \overline{\mathcal{N}}^s$, если для каждой конечной меры μ на σ-алгебре $\mathcal{B}$ найдутся множества B_1, B_2 из $\mathcal{N}^s$ такие, что $B_1 \subseteq A \subseteq B_2$ и

$$\int_E \mathbf{P}_{s,x}(B_1)\, \mu(dx) = \int_E \mathbf{P}_{s,x}(B_2)\, \mu(dx).$$

Положим $\mathcal{R}_t^s = \overline{\mathcal{M}}_t^s \cap \overline{\mathcal{N}}^s$.

Функция $\varphi_t^s(\omega)$ $(0 \leqslant s \leqslant t < \zeta(\omega))$, принимающая значения из интервала $(-\infty, +\infty)$, называется *почти аддитивным функционалом от процесса* X, если выполнены следующие условия:

1.А. Для любых $0 \leqslant s \leqslant t$ функция $\varphi_t^s(\omega)$ $\mathcal{R}_t^s$-измерима

2.Б. Для любых $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u$, $x \in E$

$$\varphi_t^s + \varphi_u^t = \varphi_u^s \quad (\text{п. н. } \Omega_u, \ \mathbf{P}_{s,x})^*$$

Почти аддитивный функционал называется непрерывным (непрерывным справа), если при любом ω $\varphi_t^s(\omega)$ есть непрерывная (непрерывная справа) функция от t. Два почти аддитивных функционала φ_t^s и $\widetilde{\varphi}_t^s$ называются эквивалентными, если $\mathbf{P}_{s,x}\{\varphi_t^s = \widetilde{\varphi}_t^s\} = 1$ для всех $0 \leqslant s \leqslant t$ и $x \in E$. Почти аддитивный функционал φ_t^s называется *аддитивным функционалом*, если он удовлетворяет следующему более сильному, чем 1.Б., условию

1.Б′. $\varphi_t^s(\omega) + \varphi_u^t(\omega) = \varphi_u^s(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u$.

Теорема 1. *Пусть непрерывный справа почти аддитивный функционал* φ_t^s *удовлетворяет условию*

1.В. $\varphi_s^s = 0$ (п. н. Ω_s, $\mathbf{P}_{s,x}$) *для всех* $0 \leqslant s$, $x \in E$**.

Тогда найдется непрерывный справа аддитивный функционал, $\widetilde{\varphi}_t^s$ *эквивалентный функционалу* φ_t^s. *Если функционал* φ_t^s *непрерывен, то и* $\widetilde{\varphi}_t^s$ *можно выбрать непрерывным.*

Доказательство. Положим

$$Q_{s,t,u} = \{\omega : \varphi_t^s \neq \varphi_t^s + \varphi_u^t\}.$$

Очевидно, $Q_{s,t,u} \in \mathcal{N}^s$, и из 1.Б следует, что при любых $q \leqslant s$, $x \in E$

$$\mathbf{P}_{q,x}(Q_{s,t,u}) = 0. \tag{2}$$

Обозначим через $\eta(\omega)$ точную верхнюю грань рациональных чисел s, таких, что $\omega \in Q_{s,t,u}$ при некоторых рациональных $u \geqslant t \geqslant s$. Очевидно, $\eta(\omega) \leqslant \zeta(\omega)$ и

$$\{\eta > q\} = \bigcup_{q < s \leqslant t \leqslant u} Q_{s,t,u} \tag{3}$$

(суммирование по рациональным s,t,u). Из (2) и (3) следует, что для любых $0 \leqslant q$ и $x \in E$

$$\mathbf{P}_{q,x}\{\eta > q\} = 0. \tag{4}$$

Ясно, что для любых рациональных $p \leqslant q \leqslant r$ из (η, ζ)

$$\varphi_q^p + \varphi_r^q = \varphi_r^p. \tag{5}$$

Пусть $\eta < s < \zeta$. Выберем рациональное $p \in (\eta, s)$ и положим в формуле (5) $q \downarrow s$. В силу непрерывности справа функционала φ_t^s имеем $\varphi_q^p \to \varphi_s^p$ и, следовательно, предел $\varphi_r^{s+0} = \lim\limits_{q \downarrow s} \varphi_r^q$ (q рационально) существует и удовлетворяет соотношению

$$\varphi_s^p + \varphi_r^{s+0} = \varphi_r^p. \tag{6}$$

---

* Запись п. н. Ω_u, $\mathbf{P}_{s,x}$ означает: почти наверное на множестве Ω_u относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$.

** Из 1.Б вытекает, что условие 1.В равносильно требованию, чтобы $\varphi_s^s < +\infty$ (п. н. Ω_s, $\mathbf{P}_{s,x}$) для всех $0 \leqslant s$, $x \in E$.

Пусть теперь $\eta < s \leqslant t < \zeta$. Положим, в формуле (6) $q \downarrow t$. Поскольку $\varphi^p_{t+0} = \varphi^p_t$, заключаем, что предел $\varphi^{s+0}_{t+0} = \lim\limits_{r \downarrow t} \varphi^{s+0}_r$ (r рационально) существует и удовлетворяет соотношению

$$\varphi^p_s + \varphi^{s+0}_{t+0} = \varphi^p_t. \tag{7}$$

Из (7) следует, что для любых $\eta < s \leqslant t \leqslant u < \zeta$

$$\varphi^{s+0}_{t+0} + \varphi^{t+0}_{u+0} = \varphi^{s+0}_{u+0}. \tag{8}$$

Далее, в силу условия 1.Б

$$\varphi^s_q + \varphi^q_r = \varphi^s_r \quad (\text{п. н. } \Omega_r,\ \mathbf{P}_{s,x}).$$

Полагая $q \downarrow s$, $r \downarrow t$ и принимая во внимание условие 1.В, имеем

$$\varphi^{s+0}_{t+0} = \varphi^s_s + \varphi^{s+0}_{t+0} = \varphi^s_t \quad (\text{п. н. } \{\eta \leqslant s < t < \zeta\},\ \mathbf{P}_{s,x}). \tag{9}$$

Пусть $0 \leqslant s \leqslant t < \zeta$. Положим

$$\widetilde{\varphi}^s_t(\omega) = \begin{cases} \varphi^{s+0}_{t+0}(\omega), & \text{если } \eta(\omega) \leqslant s, \\ +\infty, & \text{если } \eta(\omega) > s. \end{cases} \tag{10}$$

Опираясь на (8) и (7) легко проверить, что $\widetilde{\varphi}^s_t$ удовлетворяет условию 1.Б′ и непрерывен справа и что из непрерывности φ^s_t (по t) вытекает непрерывность $\widetilde{\varphi}^s_t$. Далее,

$$\left\{\widetilde{\varphi}^s_t \neq \varphi^s_t\right\} \subseteq \left\{\eta > s\right\} \cup \left\{\eta \leqslant s < t < \zeta,\ \varphi^{s+0}_{t+0} \neq \varphi^s_t\right\}$$

и, в силу (4) и (9), при любом $x \in E$ $\mathbf{P}_{s,x}\left\{\widetilde{\varphi}^s_t \neq \varphi^s_t\right\} = 0$. Отсюда следует, что $\widetilde{\varphi}^s_t$ удовлетворяет условию 1.А и представляет собой аддитивный функционал, эквивалентный φ^s_t.

Замечание. По своему характеру и по методу доказательства теорема 1 близка к теореме 3.2 книги [1].

2. Пусть E n-мерное евклидово пространство; $\mathscr{B}$ — система всех его борелевских подмножеств. n-мерным винеровским процессом называется необрывающийся * непрерывный марковский процесс в фазовом пространстве $(E, \mathscr{B})$ с переходной функцией **

$$P(s, x; t, \Gamma) = \begin{cases} [2\pi(t-s)]^{-n/2} \int\limits_\Gamma \exp\left[-\dfrac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] dy & \text{при } 0 \leqslant s < t, \\ \chi_\Gamma(x)\ *** & \text{при } 0 \leqslant s = t \end{cases}$$

($x \in E$, $\Gamma \in \mathscr{B}$, интеграл берется по мере Лебега). Существование такого процесса доказано, например, в [1] (см. n° 6.18).

Обозначим через $\mathscr{K}_{s,x}$ класс функций $\Phi(t, \omega)$ ($t \geqslant s$, $\omega \in \Omega$), принимающих значения из E и обладающих следующими свойствами:

2.α. Для каждого $\Gamma \in \mathscr{B}$

$$\{(t, \omega) : \Phi(t, \omega) \in \Gamma\} \in \mathscr{B}^s \times \mathscr{M}^{s}\ ****.$$

---

* Т. е. такой, что $\zeta(\omega) = +\infty$ для всех $\omega \in \Omega$.

** Когда речь идет об элементах векторного пространства E, запись z^2 означает скалярный квадрат z, запись $z_1 z_2$ означает скалярное произведение z_1 и z_2.

*** Символом χ_Γ обозначается индикатор (характеристическая функция) множества Γ.

**** Через $\mathscr{M}^s$ обозначена совокупность всех борелевских подмножеств интервала (s, ∞).

2.β. Для любых $t \geqslant s$, $\Gamma \in \mathscr{B}$

$$\{\omega : \Phi(t, \omega) \in \Gamma\} \in \mathscr{R}_t^s$$

2.γ. Для каждого $t \geqslant s$

$$\int_s^t \mathbf{M}_{s,x} \Phi(u, \omega)^2 \, du < \infty.$$

Согласно К.Ито [2] (см. также [3], глава 9, § 5), для $\Phi \in \mathscr{H}_{s,x}$ можно определить при любом $t \geqslant s$ стохастический интеграл

$$I_t^s(\Phi, x) = \int_s^t \Phi(u, \omega) \, dx_u,$$

обладающий следующими свойствами:

2.А. Если для некоторых $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = t$

$$\Phi(u, \omega) = \Phi(u_{i-1}, \omega) \text{ при } u \in [u_{i-1}, u_i) \, (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$I_t^s(\Phi, x) = \sum_{i=1}^n \Phi(u_{i-1}, \omega)(x_{u_i} - x_{u_{i-1}}) \text{ (п. н. } \mathbf{P}_{s,x}) \tag{11}$$

2.Б. Для любого $t \geqslant s$.

$$\mathbf{M}_{s,x}[I_t^s(\Phi, x) - I_t^s(\Psi, x)]^2 = \int_s^t \mathbf{M}_{s,x}[\Phi(u, \omega) - \Psi(u, \omega)]^2 \, du.$$

2.В. Если $\Phi, \Psi \in \mathscr{H}_{s,x}$, a и b постоянные, то $a\Phi + b\Psi \in \mathscr{H}_{s,x}$ и

$$I_t^s(a\Phi + b\Psi, x) = aI_t^s(\Phi, x) + bI_t^s(\Psi, x) \text{ (п. н. } \mathbf{P}_{s,x}).$$

2.Г. $I_t^s(\Phi, x) + I_u^t(\Phi, x) = I_u^s(\Phi, x)$ (п. н. $\mathbf{P}_{s,x}$) для любых $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u^*$.

2.Д. $\mathbf{M}_{s,x} I_t^s(\Phi, x) = 0$.

Любые два варианта функции $I_t^s(\Phi, x)$, совместимые с требованиями 1.А — 2.Б, совпадают всюду, кроме некоторого ω-множества, имеющего меру $\mathbf{P}_{s,x}$, равную нулю. С другой стороны, изменив как угодно каждую из функций $I_t^s(\Phi, x)$ на некотором ω-множестве $\Omega_{t,x}^s$, для которого $\mathbf{P}_{s,x}(\Omega_{t,x}^s) = 0$, мы не нарушим ни одного из свойств 2.А — 2.Д. Доказывается, что, пользуясь этой неопределенностью, можно выбрать значения $I_t^s(\Phi, x)$, так чтобы помимо требований 2.А — 2.Д выполнялось также условие

2.Е. При любом $\omega \in \Omega$ функция $I_t^s(\Phi, x)$ непрерывна по t для всех $t \geqslant s$. Из условий 2.А — 2.Е вытекает свойство

2.Ж. Для каждого $t \in [s, T)$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\sup_{u \in [s,t]} |I_u^s(\Phi, x) - I_u^s(\Psi, x)| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t \mathbf{M}_{s,x}[\Phi(u, \omega) - \Psi(u, \omega)]^2 \, du.$$

Положим $\mathscr{H}_s = \bigcap \mathscr{H}_{s,x}$. Для $\Phi \in \mathscr{H}_s$ $I_t^s(\Phi, x)$ определено для всех $x \in E$ и всех $t \geqslant s$. Положим $\Phi \in \mathscr{H}_s$, если $\Phi \in \mathscr{H}_s$ и если для каждого $t \geqslant s$ и каждого $x \in E$

---

* Очевидно, Φ из $\mathscr{H}_{s,x}$ индуцирует на $[t, \infty) \times E$ функцию из $\mathscr{H}_{t,x}$. Поэтому имеет смысл $I_u^t(\Phi, x)$.

можно выбрать значение $I_t^s(\Phi, x)$ так, чтобы были выполнены условия 2.A — 2.E (а, значит, и условие 2.Ж) и чтобы $I_t^s(\Phi, x)$ не зависело от x. Это значение мы будем обозначать через $I_t^s(\Phi)$ и называть основным значением стохастического интеграла

$$\int_s^t \Phi(u, \omega)\, dx_u.$$

Условимся писать $\Phi_n \overset{k}{\to} \Phi$, если $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots \in \mathscr{H}_s$ и

$$\sup_{x \in \Gamma} \int_s^t \mathbf{M}_{s,x}[\Phi(u, \omega) - \Phi_n(u, \omega)]^2\, du \to 0$$

для любого $t \geqslant s$ и для любого компакта Γ.

Лемма 1. *Пусть* $\Phi_n \overset{k}{\to} \Phi$ *и* $\Phi_n \in \mathscr{H}_s$. *Тогда* $\Phi \in \mathscr{H}_s$.

Пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$. *Положим*

$$A^s = \{\omega : I_u^s(\Phi_{n_i}) \text{ сходится равномерно по } u \text{ на каждом отрезке } [s, t]\}. \tag{12}$$

При надлежащем выборе последовательности $\{n_i\}$ $\mathbf{P}_{s,x}(A^s) = 1$ *для всех* $x \in E$ *и значение* $I_t^s(\Phi)$ *можно определить формулой*

$$I_t^s(\Phi) = \begin{cases} \lim I_t^s(\Phi_{n_i}) & \text{для } \omega \in A^s, \\ 0 & \text{для } \omega \overline{\in} A^s. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Выберем последовательность чисел $t_m \uparrow +\infty$ и последовательность компактов $\Gamma_m \uparrow E$. Положим

$$\alpha_n^m = \sup_{x \in \Gamma_m} \int_s^{t_m} \mathbf{M}_{s,x}[\Phi_n(u, \omega) - \Phi(u, \omega)]^2\, du.$$

Очевидно, при любом m $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n^m = 0$. Поэтому можно выбрать последовательность $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$, такую, что $\alpha_{n_i}^i < \dfrac{1}{2^{3i}}$. Поскольку $\alpha_n^1 \leqslant \alpha_n^2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n^m \leqslant \ldots$, то $\alpha_{n_i}^m < \dfrac{1}{2^{3i}}$ для $m \leqslant i$.

Согласно 2.Ж имеем при $i \geqslant m$

$$\sup_{x \in \Gamma_m} \mathbf{P}_{s,x}\left\{\sup_{s \leqslant u \leqslant t_m} |I_u^s(\Phi_{n_i}) - I_u^s(\Phi, x)| > \frac{1}{2^i}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2i} \int_s^{t_m} \mathbf{M}_{s,x}[\Phi_{n_i}(u, \omega) - \Phi(u, \omega)]^2\, du \leqslant 2^{2i} \alpha_{n_i}^m < \frac{1}{2^i}.$$

Поэтому для любых $t \geqslant s$, $x \in E$ начиная с некоторого i

$$\mathbf{P}_{s,x}\left\{\sup_{u \in [s,t]} |I_u^s(\Phi_{n_i}) - I_u^s(\Phi, x)| > \frac{1}{2^i}\right\} < \frac{1}{2^i}. \tag{14}$$

Определим при каждом $t \geqslant s$ функцию $I_t^s(\Phi)$ формулой (13). Очевидно при этом для каждого $x \in E$ будет выполнено условие 2.E.

Из неравенства (14) по лемме Бореля-Кантелли вытекает, что каковы бы ни были $t \geqslant s$, $x \in E$, почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$ начиная с некоторого i выполняются неравенства

$$\sup_{u \in [s,t]} \left| I_u^s(\Phi_{n_i}) - I_u^s(\Phi,\ x) \right| \leqslant \frac{1}{2^i}$$

и, значит, $I_u^s(\Phi_{n_i}) \to I_u^s(\Phi_x)$ равномерно на $[s,\ t]$. Отсюда следует, что при любом $x \in E$ $\mathbf{P}_{s,x}(A^s) = 1$ и

$$\mathbf{P}_{s,x}\left\{I_t^s(\Phi) = I_t^s(\Phi,\ x) \text{ для всех } t \geqslant s\right\} = 1.$$

Поэтому при замене $I_t^s(\Phi,\ x)$ на $I_t^s(\Phi)$ не нарушается ни одно из свойств 2.А — 2Д. Итак, $\Phi \in \mathcal{H}_s$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\Phi \in \mathcal{K}_s$ *и для любого* $t \geqslant s$ *и любого компакта* Γ

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{x \in \Gamma} \mathbf{M}_{s,x}\left[\Phi(t,\ \omega) - \Phi(t-h,\ \omega)\right]^2 = 0. \tag{15}$$

Тогда $\Phi \in \mathcal{H}_s$.

Если $\{\omega : \Phi(t,\ \omega) \in \Gamma\} \in \mathcal{R}_t^s$ *для всех* $t \geqslant s$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, *то при любых* $t \geqslant s$, $\Gamma \in \mathcal{B}$

$$\left\{\omega : I_t^s(\Phi) \in \Gamma\right\} \in \mathcal{R}_t^s.$$

Доказательство. Из условия (15) вытекает, что для любого $t \geqslant s$ и любого компакта Γ

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\substack{s \leqslant u' \leqslant u \leqslant t \\ u - u' < h}} \sup_{x \in \Gamma} \mathbf{M}_{s,x}\left[\Phi(u,\ \omega) - \Phi(u',\ \omega)\right]^2 = 0. \tag{16}$$

Заметим, далее, что $\mathbf{M}_{s,x}\Phi(t,\ \omega)^2 < \infty$ для всех $t \geqslant s$, $x \in E$. В самом деле, если бы для некоторых t и x $\mathbf{M}_{s,x}\Phi(t,\ \omega)^2 = \infty$, то в силу (16) нашлось бы $\delta > 0$, такое, что $\mathbf{M}_{s,x}\Phi(t-h,\ \omega)^2 = \infty$ для всех $0 < h < \delta$, и функция $\Phi(t,\ \omega)$ не могла бы удовлетворять условию 2.γ.

Пусть

$$0 = u_0^n < u_1^n < \ldots < u_n^n,$$

причем $u_n^n \to \infty$ и $\max\limits_i (u_i^n - u_{i-1}^n) \to 0$ при $n \to \infty$. Положим

$$\Phi_n(u,\ \omega) = \begin{cases} \Phi(u_{i-1}^n,\ \omega) & \text{при } u_{i-1}^n \leqslant u < u_i^n, \\ \Phi(u_n^n,\ \omega) & \text{при } u_n^n \leqslant u. \end{cases}$$

Очевидно, $\Phi_n \in \mathcal{K}_s$. Значения $I_t^s(\Phi_n,\ x)$ можно определить, согласно 2.А, формулой

$$I_t^s(\Phi_n,\ x) = \sum_{i=1}^{j_n} \Phi(u_{i-1}^n,\ \omega)\left(x_{u_i^n} - x_{u_{i-1}^n}\right) + \Phi(u_{j_n}^n,\ \omega)\left(x_t - x_{u_{j_n}^n}\right),$$

где

$$j_n = \max\left\{i : u_i^n \leqslant t\right\}.$$

Эти значения не зависят от x и удовлетворяют условию 2.Е. Следовательно, $\Phi_n \in \mathcal{H}_s$. Из (16) вытекает, что $\Phi_n \overset{h}{\to} \Phi$. По лемме 1 $\Phi \in \mathcal{K}_s$ и значение $I_t^s(\Phi)$ можно определить формулой (13). Предположим, что для каждого $t \geqslant s$ функция $\Phi(t,\ \omega)$ $\mathcal{R}_t^s$-измерима. Тогда функции $I_t^s(\Phi_n)$ $\mathcal{R}_t^s$-измеримы и множество A^s принадлежит $\mathcal{R}_t^s$. Поэтому функция $I_t^s(\Phi)$ $\mathcal{R}_t^s$-измерима.

3. Теорема 2. *Пусть $\mathcal{B}$ система всех борелевских подмножеств n-мерного евклидова пространства E и пусть $f(t, x)$ $(t \geqslant s,\ x \in E)$ — функция со значениями из E, удовлетворяющая условиям:*

3.А. *Для всякого* $\Gamma \in \mathcal{B}$

$$\{(t, x) : f(t, x) \in \Gamma\} \in \mathcal{B}^{\circ} \times \mathcal{B}.$$

3.Б. *Для любого* $t \geqslant s$

$$\sup_{\substack{0 \leqslant u \leqslant t \\ x \in E}} f^2(u, x) < \infty.$$

Тогда можно выбрать основное значение стохастического интеграла так, чтобы формула

$$\varphi_t^s = \int_s^t f(u, x_u)\, dx_u$$

определяла непрерывный аддитивный функционал от винеровского процесса.

Доказательство. 1°. Положим

$$\Phi_f(u, \omega) = f(u, x_u).$$

Отнесем функцию f к системе $\mathcal{S}$, если при любом $s \leqslant 0$ $\Phi_f \in \mathcal{H}_s$ и для каждого $t \geqslant s$ можно выбрать значение $I_t^s(\Phi_f)$ так, чтобы оно представляло собой $\mathcal{R}_t^s$-измеримую функцию и удовлетворяло условию 2.Е. Ясно, что при этом $\tilde{\varphi}_t^s = I_t^s(\Phi_f)$ является непрерывным почти аддитивным функционалом. В силу 2.Б выполняется условие 1.В, и по теореме 1 найдется непрерывный аддитивный функционал φ_t^s, эквивалентный $\tilde{\varphi}_t^s$. Легко видеть, что этот аддитивный функционал задает некоторый вариант основного значения стохастического интеграла $\int_s^t f(u, x_u)\, dx_u$.

Итак, чтобы доказать теорему 2, достаточно убедиться, что всякая функция, удовлетворяющая условиям 3.А — 3.Б, принадлежит $\mathcal{S}$.

2°. Покажем, что если функция $f(t, x)$ непрерывна и удовлетворяет условию 3.Б, то она принадлежит $\mathcal{S}$. В силу леммы 2 для этого достаточно проверить, что Φ_f удовлетворяет условию (15).

Фиксируем какое-нибудь $t \geqslant s$ и положим

$$\left.\begin{aligned} c &= 4 \sup_{\substack{u \in [0, t] \\ x \in E}} f^2(u, x), \quad \Gamma_m = \{x : x^2 \leqslant m^2\}, \\ q(m, \alpha, h) &= \sup_{\substack{x \in \Gamma_m \\ z^2 \leqslant \alpha^2}} [f(t, x) - f(t - h,\ x - z)]^2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Очевидно,

$$\mathbf{M}_{s,x}[\Phi_f(t, \omega) - \Phi_f(t - h,\ \omega)]^2 = \mathbf{M}_{s,x}[f(t,\ x_t) - f(t - h, x_{t-h})]^2 \leqslant$$

$$\leqslant q(m, \alpha, h) + c\mathbf{P}_{s,x}\{x_t \overline{\in} \Gamma_m\} + c\mathbf{P}_{s,x}\{(x_t - x_{t-h})^2 > \alpha^2\}. \tag{18}$$

По неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}_{s,x}\{(x_t - x_{t-h})^2 > \alpha^2\} \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\mathbf{M}_{s,x}(x_t - x_{t-h})^2 = \frac{nh}{\alpha^2}. \tag{19}$$

Если $x \in \Gamma_k$ и $k < m$, то

$$\{x_t \overline{\in} \Gamma_m\} \subseteq \{(x_t - x)^2 \geqslant (m - k)^2\},$$

и

$$\mathbf{P}_{s,x}\{x_t \overline{\in} \Gamma_m\} \leqslant \mathbf{P}_{s,x}\{(x_t - x_s)^2 \geqslant (m-k)^2\} \leqslant \frac{\mathbf{M}_{s,x}(x_t - x_s)^2}{(m-k)^2} = \frac{n(t-s)}{(m-k)^2}. \tag{20}$$

Из (18), (19) и (20) вытекает, что при $m > k$

$$\sup_{x \in \Gamma_k} \mathbf{M}_{s,x}[\Phi_f(t,\omega) - \Phi_f(t-h,\omega)]^2 \leqslant q(m,\alpha,h) + c\frac{n(t-s)}{(m-k)^2} + c\frac{nh}{\alpha^2}. \tag{21}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть Γ какой угодно компакт. Выберем k так, чтобы $\Gamma \leqslant \Gamma_k$. Выберем затем m так, чтобы второй член в правой части (21) стал меньше $\varepsilon/3$. В силу непрерывности $f(t,x)$ мы можем после этого выбрать $\alpha > 0$ так, чтобы при $h < \alpha$ первый член был меньше, чем $\varepsilon/3$. Пусть $0 < \delta < \min\left(\alpha, \frac{\varepsilon\alpha^2}{3ch}\right)$. Тогда при $h < \delta$ третий член также меньше $\varepsilon/3$. Итак, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < h < \delta$

$$\sup_{x \in \Gamma} \mathbf{M}_{s,x}[\Phi_f(t,\omega) - \Phi_f(t-h,\omega)]^2 < \varepsilon.$$

Это значит, что Φ_f удовлетворяет условию (15).

3°. Покажем теперь, что класс $\mathscr{S}$ содержит любую функцию $f(t,x)$, удовлетворяющую условиям 3.А — 3.Б. В силу леммы 1 и пункта 2 для этого достаточно построить последовательность непрерывных функций $f_n(t,x)$, подчиненных условию 3.Б, такую, что $f_n(t,x) \overset{k}{\to} f(t,x)$.

Положим

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\Gamma) &= \int_{\Gamma} dt\,dx \\ \mu(\Gamma) &= \int_{\Gamma} (2\pi u)^{-n/2} e^{-y^2/2u}\,du\,dy \end{aligned}\right\} \quad (\Gamma \in \mathscr{B}^\circ \times \mathscr{B}).$$

Опираясь на теорему Лузина (см., например, [4], глава 4, § 5) и теорему продолжения Урысона (см., например, [5], § 25, VIII), нетрудно построить для каждого $\varepsilon > 0$ открытое множество U_ε и непрерывную функцию $f_\varepsilon(u,y)$ такие, что $\lambda(U_\varepsilon) < \varepsilon$ и

$$f_\varepsilon^2(u,y) \leqslant f^2(u,y) \text{ для всех } (u,y) \in [0,\infty) \times E,$$
$$f_\varepsilon(u,y) = f(u,y) \text{ для } (u,y) \overline{\in} U_\varepsilon.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_s^t \mathbf{M}_{s,x}[f_\varepsilon(u,x_u) - f(u,x_u)]^2\,du \leqslant c\mu(U_\varepsilon^{s,x}), \tag{22}$$

где c определено формулой (17), $U_\varepsilon^{s,x}$ обозначает множество всех пар $(u+s, y+x)$ $(u,y) \in U_\varepsilon$). С другой стороны, для любого $\alpha > 0$ и любого $\Gamma \in \mathscr{B}^\circ \times \mathscr{B}$

$$\mu(\Gamma) \leqslant \alpha + (2\pi\alpha)^{-n/2}\lambda(\Gamma). \tag{23}$$

Сопоставляя (22) и (23) и принимая во внимание, что $\lambda(U_\varepsilon^{s,x}) = \lambda(U_\varepsilon) < \varepsilon$, имеем

$$\int_s^t \mathbf{M}_{s,x}[f_\varepsilon(u,x_u) - f(u,x_u)]^2 du \leqslant c\alpha + c(2\pi\alpha)^{-n/2}\varepsilon.$$

Из этой оценки видно, что $f_\varepsilon(u,x_u) \overset{k}{\to} f(u,x_u)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Предположим, что функция $f(t, x)$ удовлетворяет помимо 3.А—3.Б следующему условию:

3.В. Для всех $s \geqslant 0$, $x \in E$

$$\int_s^\infty \mathbf{M}_{s,x} f^2(u, x_u)\, du < \infty.$$

Тогда непрерывный аддитивный функционал, построенный в теореме 2, можно выбрать так, чтобы для каждого $\omega \in \Omega$ и каждого $s \geqslant 0$ существовал предел $\varphi^s_\infty(\omega) = \lim\limits_{t \uparrow \infty} \varphi^s_t(\omega)$.

В самом деле, положим

$$A^s_t(\varepsilon) = \{\omega : \sup_{u \in [s,t]} |\varphi^s_u| \leqslant \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0).$$

В силу 2.Ж

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A^s_t(\varepsilon)\} \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t \mathbf{M}_{s,x} f^2(u, x_u)\, du,$$

и согласно 3.В

$$\lim_{s \uparrow \infty} \lim_{t \uparrow \infty} \mathbf{P}_{s,x}\{A^s_t(\varepsilon)\} = 0. \tag{24}$$

Положим $\omega \in A$, если для некоторого $s \geqslant 0$ существует конечный предел $\lim\limits_{t \uparrow \infty} \varphi^s_t$. Очевидно, $A \in \mathcal{N}^s$ при любом $s \geqslant 0$. Пусть $t_m \uparrow t$. Имеем

$$A = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{l=m}^\infty A^{t_m}_{t_l}\left(\frac{1}{n}\right),$$

и в силу (24)

$$\mathbf{P}_{s,x}(A) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \lim_{l \to \infty} \mathbf{P}_{s,x}\left\{A^{t_m}_{t_l}\left(\frac{1}{n}\right)\right\} = 1.$$

Стало быть, $A \in \mathcal{N}^s \cap \overline{\mathcal{M}}^s_t \subset \mathcal{R}^s_t$ при любых $0 \leqslant s \leqslant t$. Формула

$$\hat{\varphi}^s_t(\omega) = \begin{cases} \varphi^s_t(\omega), & \text{если } \omega \in A \\ 0, & \text{если } \omega \overline{\in} A \end{cases}$$

определяет непрерывный аддитивный функционал, эквивалентный φ^s_t и такой, что

$$\lim_{t \uparrow \infty} \hat{\varphi}^s_t(\omega) \text{ существует при всех } \omega \in \Omega,\ s \geqslant 0.$$

Замечание 2. Условие 3.Б можно ослабить, заменив его, например, следующими условиями:

3.Б′. Для любого $t \geqslant 0$ и любого компакта Γ

$$\sup_{\substack{0 \leqslant u \leqslant t \\ x \in \Gamma}} f^2(u, x) < \infty.$$

3.Б″. Для любого $\alpha > 0$ и любого $t \geqslant 0$

$$\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \int_E f^2(u, x)\, e^{-\alpha x^2} dx < \infty.$$

В самом деле, нетрудно проверить, что при любом m функция

$$f_m(t, x) = f(t, x)\, \chi_{[0, m^2]}(x^2)\, \chi_{[0,m]}(t)$$

удовлетворяет условиям 3.А — 3.Б и $f_m(u, x_u) \xrightarrow{h} f(u, x_u)$ при $m \to \infty$.

4. Условия, сформулированные в начале $n^\circ 2$, определяют винеровский процесс не вполне однозначно. Пользуясь этим, можно выбрать пространство элементарных событий Ω так, чтобы равенство $x_t(\omega) = x_t(\omega')$ для всех $t \in [0, \infty)$ имело место только при

$\omega = \omega'$ (см. [1], n° 2.13). При таком выборе винеровский процесс является однородным марковским процессом ([1], теорема 2.10), и для любой функции $\xi(\omega)(\omega \in \Omega)$ можно определить ее «сдвиги во времени» $\theta_h \xi$ $(h \geqslant 0)$. Операторы θ_h обладают рядом свойств, из которых нам понадобятся следующие:

4.А. $\theta_h F(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots; \xi_1, \xi_2, \ldots) = F(x_{u_1+h}, x_{u_2+h}, \ldots; \theta_h\xi_1; \theta_h\xi_2, \ldots)$.

4.Б. Если $\mathbf{M}_{s,x}\xi$ существует, то $\mathbf{M}_{s+h,\,x}\theta_h\xi = \mathbf{M}_{s,x}\xi$.

Теорема 3. *Если* $\Phi(u, \omega) \in \mathcal{K}_{s,x}$, *то*

$$\theta_h \int_s^t \Phi(u, \omega)\, dx_u = \int_{s+h}^{t+h} \theta_h \Phi(u - h, \omega)\, dx_u \quad (\text{п.н. } \mathbf{P}_{s+h,\,x}). \tag{25}$$

Доказательство. Из 2.А и 4.А следует справедливость (25) для ступенчатых функций $\Phi(u, \omega)$. Далее, согласно [3] глава 9, § 5 для каждой функции $\Phi \in \mathcal{K}_{s,x}$ можно построить последовательность ступенчатых функций $\Phi_n \in \mathcal{K}_{s,x}$ таких, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_s^t \mathbf{M}_{s,x} [\Phi(u, \omega) - \Phi_n(u, \omega)]^2 du = 0. \tag{26}$$

Положим

$$\widetilde{\Phi}(u, \omega) = \theta_h \Phi(u - h, \omega), \quad \widetilde{\Phi}_n(u, \omega) = \theta_h \Phi_n(u - h, \omega).$$

В силу 4.Б и 2.Б

$$\mathbf{M}_{s+h,\,x} \left\{\theta_h [I_t^s(\Phi, x) - I_t^s(\Phi_n, x)]^2\right\} = \mathbf{M}_{s,x} [I_t^s(\Phi, x) - I_t^s(\Phi_n, x)]^2 =$$

$$= \int_s^t \mathbf{M}_{s,x} [\Phi(u, \omega) - \Phi_n(u, \omega)]^2 du. \tag{27}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{M}_{s+h,\,x} [I_{t+h}^{s+h}(\widetilde{\Phi}_n, x) - I_{t+h}^{s+h}(\widetilde{\Phi}, x)]^2 = \int_{s+h}^{t+h} \mathbf{M}_{s+h,\,x} [\widetilde{\Phi}_n - \widetilde{\Phi}]^2 du =$$

$$= \int_{s+h}^{t+h} \mathbf{M}_{s,x} [\Phi_n(u - h, \omega) - \Phi(u - h, \omega)]^2 du = \int_s^t \mathbf{M}_{s,x} [\Phi_n(u, \omega) - \Phi(u, \omega)]^2 du. \tag{28}$$

Принимая во внимание, что $\theta_h I_t^s(\Phi_n, x) = I_{t+h}^{s+h}(\widetilde{\Phi}_n, x)$ имеем из (26), (27) и (28)

$$\mathbf{M}_{s+h,\,x} [\theta_h I_t^s(\Phi, x) - I_{t+h}^{s+h}(\widetilde{\Phi}, x)]^2 = 0,$$

что равносильно (25).

Следствие. *Если* φ_t^s *аддитивный функционал, определенный в теореме 2, то*

$$\theta_h \varphi_t^s = \varphi_{t+h}^{s+h} \quad (\text{п. н. } \mathbf{P}_{s+h,\,x}) \tag{29}$$

Аддитивный функционал φ_t^s, удовлетворяющий равенству (29), мы называем почти однородным аддитивным функционалом.

5. Докажем в заключение одну теорему, которая используется при построении преобразований марковских процессов с помощью аддитивных функционалов.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(u, x)$ *удовлетворяет условиям* 3.А — 3.Б, *функция* $V(u, x)$ $\mathcal{B}^\circ \times \mathcal{B}$*-измерима. Положим*

$$\alpha_t^s = \exp\left[-\int_s^t f(u, x_u)\, dx_u - \int_s^t V(u, x_u)\, du\right]. \tag{30}$$

Если $V \geqslant \frac{1}{2} f^2$, *то*

$$\mathbf{M}_{s,x}\alpha_t^s \leqslant 1 \quad (s \geqslant 0,\ x \in E). \tag{31}$$

Если $V = \frac{1}{2} f^2$, *то*

$$\mathbf{M}_{s,x}\alpha_t^s = 1 \quad (s \geqslant 0,\ x \in E). \tag{32}$$

Доказательство. По теореме К. Ито (см. [6], теорема 6) из равенства (30) вытекает, что для всякой функции $g(v)$, имеющей две непрерывных ограниченных производных, выполняется соотношение

$$g(\varphi_t^s) = g(\varphi_s^s) + \int_s^t \left[g'(\varphi_u^s) V(u, x_u) + \frac{1}{2} g''(\varphi_u^s) f^2(u, x_u) \right] du + \\ + \int_s^t g'(\varphi_u^s) f(u, x_u)\, dx_u. \tag{33}$$

Положим

$$g_n(v) = \begin{cases} e^{-v} & \text{при } v \geqslant -n, \\ e^n + \int_v^{-n} e^{-w} \sin^2 \frac{\pi}{2}(w + n + 1)\, dw & \text{при } -n > v \geqslant -n-1, \\ e^n + \int_{-n-1}^{-n} e^{-w} \sin^2 \frac{\pi}{2}(w + n + 1)\, dw & \text{при } -n-1 > v. \end{cases}$$

Функция g_n обладают следующими свойствами:

а) $g_n(v)$, $g_n'(v)$ и $g_n''(v)$ непрерывны и ограничены на всей прямой;

в) $g_n'(v) \leqslant 0$;

с) $-\pi e^{-v} \leqslant g_n'(v) + g_n''(v) \leqslant 0$;

d) при $n \to \infty$ $g_n(v) \uparrow e^{-v}$, $g_n'(v) + g_n''(v) \to 0$;

е) $g_n(0) = 1$.

Полагая в соотношении (33) $g = g_n$, имеем

$$g_n(\varphi_t^s) = g_n(\varphi_s^s) + \xi_n + \eta_n, \tag{33'}$$

где

$$\xi_n = \int_s^t \left[g_n'(\varphi_u^s) V(u, x_u) + \frac{1}{2} g_n''(\varphi_u^s) f^2(u, x_u) \right] du,$$

$$\eta_n = \int_s^t g_n'(\varphi_u^s) f(u, x_u)\, dx_u.$$

В силу а) $g_n'(\varphi_u^s) f(u, x_u) \in \mathcal{K}_{s,x}$ и согласно 2.Д $\mathbf{M}_{s,x}\eta_u = 0$. Из 2.Б вытекает, что $\mathbf{P}_{s,x}\{\varphi_s^s = 0\} = 1$, и в силу е) $\mathbf{M}_{s,x} g_n(\varphi_s^s) = 1$. Поэтому из (33′) получаем

$$\mathbf{M}_{s,x} g_n(\varphi_t^s) = 1 + \mathbf{M}_{s,x}\xi_n. \tag{34}$$

Если $V \geqslant \frac{1}{2} f^2$, то в силу в) и с)

$$\xi_n \leqslant \int_s^t \frac{1}{2} f^2(u, x_u) \left[g_n'(\varphi_u^s) + g_n''(\varphi_u^s) \right] du \leqslant 0$$

и в силу (34) $\mathbf{M}_{s,x} g_n(\varphi_t^s) \leqslant 1$. Полагая $n \to \infty$ и принимая во внимание d), приходим к неравенству (31).

Предположим теперь, что $V = \frac{1}{2} f^2$. Тогда $\xi_n = \int_s^t \frac{1}{2} f^2(u, x_u)[g_n'(\varphi_u^s) + g_n''(\varphi_u^s)]\, du$ и

$$\mathbf{M}_{s,x} \xi_n = \int_s^t \mathbf{M}_{s,x} \left\{ \frac{1}{2} f^2(u, x_u)\, [g_n'(\varphi_u^s) + g_n''(\varphi_u^s)] \right\} du. \tag{35}$$

В силу c) абсолютная величина подынтегральной функции не превосходит $C\alpha_u^s$, где C — некоторая константа. В силу (31) функция $C\alpha_u^s$ — суммируема. Поэтому можно перейти к пределу под знаком интеграла (35). Принимая во внимание d), имеем $\lim \mathbf{M}_{s,x} \xi_n = 0$. Из (34) выводим (32).

Замечание. Если функция f помимо условий 3.А — 3.Б удовлетворяет условию 3.В, то при $V \geqslant \frac{1}{2} f^2$

$$\mathbf{M}_{s,x} \alpha_\infty^s \leqslant 1. \tag{36}$$

Если, кроме того $\sup_{\substack{0 \leqslant u < \infty \\ x \in E}} f^2(u, x) < \infty$, то при $V = \frac{1}{2} f^2$

$$\mathbf{M}_{s,x} \alpha_\infty^s = 1. \tag{37}$$

Неравенство (36) вытекает из (31) в силу теоремы Фату. Далее, при $V = \frac{1}{2} f^2$, сопоставляя (34) и (35) и полагая $t \uparrow \infty$, имеем

$$\mathbf{M}_{s,x} g_n(\varphi_\infty^s) = 1 + \int_s^\infty \mathbf{M}_{s,x} \left\{ \frac{1}{2} f^2(u, x_u)\, [g_n'(\varphi_u^s) + g_n''(\varphi_u^s)] \right\} du.$$

Равенство (37) выводится отсюда так же, как равенство (32) из (34).

Поступила в редакцию
18.1.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Основания теории марковских процессов, М., 1959.
[2] K. Ito, Stochastic differential equations, Memoirs Amer. Math. Soc., N 4, 1951. (Русский перевод в сб. Математика. 1 : 1 (1957), 78—116).
[3] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.
[4] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной М. — Л., 1950.
[5] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М. —Л., 1937.
[6] K. Ito, On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J.,3 (1951), 55 — 65. (Русск. перевод в сб. Математика, 3 : 5 (1959), 131 — 141).

ADDITIVE FUNCTIONALS OF A WIENER PROCESS DETERMINED BY STOCHASTIC INTEGRALS

E. B. DYNKIN (*MOSCOW*)

We give definitions of additive and almost additive functionals of Markov processes and prove a general theorem about such functionals. Then we investigate the additive functionals of the n-dimensional Wiener process determined by stochastic integrals.

ОБ ОЦЕНКАХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Л. Н. БОЛЬШЕВ

Задача оценки неизвестной вероятности положительного исхода в последовательности независимых испытаний является одной из классических задач математической статистики. Особенно полно исследован случай схемы Бернулли, когда число испытаний n заранее фиксировано. В этом случае, как известно, эффективной оценкой для вероятности p является частота μ/n, где μ — число положительных исходов. В 1934 году Клоппер и Е. Пирсон [4] указали метод построения интервальных оценок для p. Основой этого метода послужило равенство $\mathbf{P}\{\mu \leqslant m|n, p\} = I_{1-p}(n-m,\ m+1)$, где $I_x(u,v)$ — функция B-распределения с параметрами u и v:

$$I_x(u, v) = 1 - I_{1-x}(v, u) = \frac{1}{\mathrm{B}(u, v)} \int_0^x t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt.$$

Если P — заданный коэффициент доверия и если случайные величины φ и ψ определяются равенствами

$$I_{1-\psi}(n-\mu,\ \mu+1) = \frac{1-P}{2}, \qquad I_{\varphi}(\mu,\ n-\mu+1) = \frac{1-P}{2}, \tag{1}$$

то (φ, ψ) представляет собой доверительный интервал для p с истинным коэффициентом доверия $\geqslant P$ (см., например, [2]). Таким образом, доверительные пределы являются квантилями B-распределения. Известные таблицы φ и ψ для коэффициентов доверия 0,95 и 0,99 [2,6] составлены с помощью таблиц квантилей B-распределения [9].

Следует отметить, что для оценки неизвестной вероятности схема Бернулли не всегда оказывается наиболее целесообразной. Например, если требуется оценить p с относительной погрешностью, не превышающей некоторой заданной величины, то в качестве меры точности оценки разумно выбрать коэффициент изменчивости v (отношение квадратичного отклонения к математическому ожиданию оценки). В случае схемы Бернулли $v = [(1-p)/np]^{1/2}$, т. е. при фиксированном n и $p \to 0$ коэффициент v неограниченно возрастает. Поэтому экспериментаторы часто отказываются от схемы Бернулли и заменяют ее такой схемой, для которой коэффициент изменчивости ограничен [3,7]. Применение экспериментальной процедуры, отличной от схемы Бернулли, обычно затруднено отсутствием метода построения интервальных оценок. Цель данной заметки — показать, что для широкого класса экспериментальных схем применим с небольшими видоизменениями метод Клоппера-Пирсона и поэтому интервальные оценки для p можно строить с помощью таблиц [2, 6, 9]. В качестве примера рассматривается задача оценки малых вероятностей с помощью так называемой отрицательно-биномиальной схемы. Попутно будут указаны асимптотические формулы для функции и квантилей B-распределения. Приближенные доверительные пределы для малых p, найденные по этим формулам, оказываются точнее соответствующих Пуассоновских приближений.

1. Рассмотрим последовательность независимых испытаний, в каждом из которых положительный исход может осуществиться с постоянной вероятностью p. Результаты таких испытаний удобно представить в виде маршрута частицы, блуждающей по точкам с целочисленными координатами. Исходной точкой маршрута является начало координат. Если в какой-то момент времени блуждающая частица находилась в точке (x,y), то в следующий момент она с вероятностью p может перейти в $(x+1,y)$ и с вероятностью $q = 1-p$ в $(x,y+1)$. Величина p предполагается неизвестной и подлежит экспериментальной оценке.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие экспериментальные процедуры, осуществление которых эквивалентно реализации блуждания частицы на плоскости с «поглощающей границей» G. Иными словами — предполагается, что блуждание, моделирующее экспериментальную процедуру, продолжается до тех пор, пока частица не достигнет заданного множества G. Для определения неизвестной вероятности p мы ограничимся такими ее оценками (интервальными или точечными), которые зависят лишь от

координат той граничной точки, в которой прекратилось блуждание. Так как всякая экспериментальная процедура, удовлетворяющая этим условиям, представляет собой частный случай последовательного анализа, то условимся называть такие процедуры последовательными схемами.

Определение: Последовательная схема называется простой (ПСС), если граница G удовлетворяет следующим двум условиям:

1) При любом $0<p<1$ блуждающая частица достигает G за конечное число шагов с вероятностью единица.

2) Если при любом $0<p<1$ граничная точка (x,y) $(x\geqslant 1,\ y\geqslant 1)$ достигается с положительной вероятностью, то прямоугольник $0\leqslant X\leqslant x-1,\ 0\leqslant Y\leqslant y-1$ не содержит ни одной граничной точки. [Если $(x,y)\in G$, то вероятность попадания в (x,y) равна $K(x,y)\,p^x\,q^y$, где K — число допустимых маршрутов, которые соединяют $(0,0)$ и (x,y), минуя остальные граничные точки; поэтому (x,y) достигается с положительной вероятностью, если $K(x,y)>0$.]

Частным случаем ПСС является схема Бернулли, в которой граница G состоит из всех тех точек с неотрицательными целочисленными координатами (x,y), которые удовлетворяют уравнению $x+y=n$. В работе [5] доказано, что если для данной ПСС точка с координатами (r,s) достигается с положительной вероятностью, то существует несмещенная оценка для $p^r\,q^s$. Если (μ,ν) — координаты граничной точки, в которой прекратилось блуждание, то такой оценкой (может быть, неединственной) является отношение числа допустимых маршрутов, соединяющих (r,s) и (μ,ν), к числу допустимых маршрутов, соединяющих $(0,0)$ и (μ,ν).

2. Покажем теперь, что в случае ПСС значение интервальной оценки для p в любой граничной точке зависит лишь от координат этой точки и от расположения двух соседних граничных точек. Действительно, если имеет место ПСС, то множество всех достижимых граничных точек с положительными координатами (x,y) разбивается на следующие три класса:

I. $(x,y)\in G$, $(x,y-1)\bar{\in} G$, $(x-1,y)\bar{\in} G$. По предположению ни одна из точек прямоугольника $0\leqslant X\leqslant x,\ 0\leqslant Y\leqslant y$, кроме (x,y), не принадлежит G, поэтому несмещенная оценка для p в граничных точках этого класса имеет вид $x/(x+y)$. Определим теперь, с какой вероятностью блуждающая частица пройдет либо через точку (x,y), либо левее и выше этой точки. Для этого построим вспомогательную схему Бернулли, в которой $n=x+y$. Очевидно, что искомая вероятность $P_1(x,y)$ совпадает с вероятностью $\mathbf{P}\{\mu\leqslant x\mid n,p\}$ в схеме Бернулли, т. е. согласно (1) $P_1(x,y)=I_{1-p}(y,x+1)$. С помощью этого же приема можно показать, что блуждающая частица пройдет либо через точку (x,y), либо правее и ниже этой точки с вероятностью $Q_1(x,y)=I_p(x,y+1)$. Таким образом, в граничных точках I класса интервальные и точечные оценки совпадают с соответствующими оценками для схемы Бернулли при $n=x+y$ и $\mu=x$.

II. $(x,y)\in G$, $(x,y-1)\in G$, $(x-1,y)\bar{\in} G$. В этом случае ни одна из точек прямоугольника $0\leqslant X\leqslant x-1,\ 0\leqslant Y\leqslant y$ не принадлежит G и в точку (x,y) можно попасть лишь из $(x-1,y)$. Поэтому несмещенная оценка для p в точках II класса имеет вид $(x-1)/(x+y-1)$. Вычислим теперь, с какой вероятностью частица пройдет либо через точку (x,y), либо левее и выше этой точки. С этой целью построим вспомогательную схему Бернулли, в которой $n=x+y-1$. Легко можно убедиться, что в данном случае $P_2(x,y)=\mathbf{P}\{\mu\leqslant x-1\mid n,p\}=I_{1-p}(y,x)$. Что же касается вероятности того, что частица пройдет либо через точку (x,y), либо правее и ниже этой точки, то, как и в предыдущем случае, $Q_2(x,y)=I_p(x,y+1)$. Таким образом, если (x,y) — точка II класса, то оценки для p в этой точке получаются так же, как и в случае схемы Бернулли. При этом для отыскания несмещенной оценки и верхнего доверительного предела ψ следует положить $\mu=x-1$, $n=x+y-1$, а для отыскания нижнего доверительного предела φ положить $\mu=x$, $n=x+y$.

III. $(x,y)\in G$, $(x,y-1)\bar{\in} G$, $(x-1,y)\in G$. Этот случай сводится к предыдущему заменой x на y и p на q.

В ы в о д. Доверительные пределы для p в случае любой ППС представляют собой квантили B-распределения, поэтому для построения интервальных оценок можно воспользоваться таблицами [2, 6, 9].

3. В качестве примера рассмотрим такую ППС, граница которой представляет собой прямую с уравнением $x = m$ ($m \geq 1$). Согласно этой схеме испытания продолжаются до тех пор, пока не наступит ровно m положительных исходов [3, 7]. Все граничные точки (m, y) $y = 0, 1, 2, \ldots$ принадлежат ко II классу, поэтому при $m > 1$ несмещенная оценка для p имеет вид $p^* = (m-1)/(m+y-1)$ (если $m = 1$, то $p^* = 1$ при $y = 0$, и $p^* = 0$ при $y > 0$). Число отрицательных исходов ν, осуществившихся к моменту наступления m-го положительного исхода, подчиняется так называемому отрицательно-биномиальному распределению: $\mathbf{P}\{\nu = y\} = C^m_{m+y-1} p^m q^y$ ($y = 0, 1, 2, \ldots$) (это распределение иногда называют распределением Полиа: при $m = 1$ оно превращается в распределение Паскаля). Легко можно показать, что ν представляет собой достаточную статистику маршрута и что p^* — единственная несмещенная оценка для p, выраженная через достаточную статистику. Отсюда следует, что p^* — несмещенная оценка с наименьшей дисперсией, причем если $m = 1$, то $\mathbf{D}p^* = pq$, если $m = 2$, то $\mathbf{D}\,p^* = -p^2(q + \ln p)/q$, если же $m \geq 3$, то $\mathbf{D}p^* = p^2/(m-2) + o(p^2)$. Иными словами — если $p \to 0$, то коэффициент изменчивости оценки p^* стремится к $(m-2)^{-1/2}$. Этим свойством схема Полиа выгодно отличается от схемы Бернулли.

Воспользовавшись последним замечанием из п.1, можно легко найти наилучшую оценку для $\mathbf{D}\,p^*$. Действительно, $\mathbf{D}\,p^* = \mathbf{M}\,p^{*2} - p^2 = \mathbf{M}\,p^{*2} - p \cdot pq$, причем $\mathbf{M}\,p^* = p$. Что касается несмещенной оценки ζ для pq, то согласно указанному выше замечанию, при $m \geq 2$ она задается отношением $\zeta = (m-1)\nu/(m+\nu-1)(m+\nu-2)$ (при $m = 2$ и $\nu = 0$ следует положить $\zeta = 0$), если же $m = 1$, то $\zeta = 1$ при $\nu = 1$ и $\zeta = 0$ в остальных случаях. Таким образом, искомая оценка для $\mathbf{D}\,p^*$ равна $\zeta - p^*(1-p^*)$. Легко можно убедиться, что это единственная несмещенная оценка, являющаяся функцией достаточной статистики ν. Если, например, $m \geq 2$, то

$$\mathbf{D}\,p^* \sim \frac{\nu(m-1)}{(m+\nu-1)^2(m+\nu-2)}.$$

В работе [7] в качестве оценок для $\mathbf{D}\,p^*$ предлагаются две статистики: $m\nu/(m+\nu)^3$ и $m\nu/(m+\nu)^2(m+\nu-1)$. Обе эти оценки имеют положительное смещение (по крайней мере — для достаточно малых p).

Так как граница $x = m$ состоит из точек II класса, то доверительные пределы (φ, ψ), соответствующие коэффициенту доверия P, определяются равенствами: $I_\varphi(m, \nu+1) = (1-P)/2$ и $I_\psi(m, \nu) = (1+P)/2$.

4. Если неизвестная вероятность p мала и для ее оценки применяется схема Полиа, то наблюдаемое число отрицательных исходов ν будет, как правило, значительно больше m. Поэтому для отыскания квантилей B-распределения можно воспользоваться предельной теоремой (см., например, [2]): Если случайная величина β подчиняется B-распределению с параметрами m и n и если $n \to \infty$, то случайная величина $\gamma = n\beta$ будет асимптотически подчиняться Г-распределению с параметром m, т. е. $I_{\gamma/n}(m, n) \to I(x, m)$

где

$$I(x,m) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x t^{m-1} e^{-t}\, dt.$$

Преобразование $\beta = \gamma/n$ позволяет получать хорошие приближения квантилей B-распределения лишь при очень больших значениях n. Несколько более лучшие результаты дает преобразование $\beta = \gamma/(m+n-1)$, которое является следствием приближенной формулы Пуассона для биномиальных вероятностей. С помощью разложения $I_x(m, n)$ в ряд Лагерра [8], а также с помощью обобщения теоремы в работе [1], можно указать более точное преобразование

$$\beta^* = \frac{2\gamma}{M + \gamma - [(m^2-1) + (m-1)\gamma - 2\gamma^2]\dfrac{1}{6M}} \qquad (M = 2n + m - 1). \tag{2}$$

Если γ подчиняется Г-распределению с параметром m, то функция распределения случайной величины β^* отличается от $I_x(m, n)$ величиной порядка n^{-3} (эта оценка равномерна в любом конечном интервале изменения nx, расположенном на положительной части числовой оси). Так как при m, кратном 1/2, случайная величина 2γ подчиняется распределению χ^2 с $2m$ степенями свободы, то (2) можно записать так:

$$\beta^* = \frac{2\chi^2}{N + \chi^2 - [2(m^2-1) + (m-1)\chi^2 - \chi^4]\dfrac{1}{3N}} \quad (N = 4n+2m-2). \qquad (3)$$

Если в (3) χ^2 заменить квантилью χ^2-распределения с $2m$ степенями свободы, то β^* будет отличаться от соответствующей квантили B-распределения с параметрами m и n величиной порядка n^{-5}.

5. Асимптотические формулы (2) и (3) предназначены для случая, когда $m = o(n)$ (в терминах последовательности независимых испытаний этот случай называют случаем «редких событий»). Поэтому вполне естественно, что применение формулы (3) дает надежные приближения для нижних квантилей при малых m/n. Например, если $m = 10$, $n = 30$, то квантили B-распределения для вероятностей 0,005, 0,5, 0,995 равны соответственно 0,10259, 0,24580, 0,44312. По формуле (3) получаем 0,10259, 0,24580, 0,44315, в то время как Пуассоновское приближение дает 0,09531, 0,24792, 0,51278.

Если отношение m/n близко к единице, то точность формулы (3) снижается (особенно — для верхних квантилей), однако приближение (3) по-прежнему остается более точным, чем Пуассоновское приближение. С помощью небольшого видоизменения формулы (3) можно добиться, чтобы приближения верхних квантилей B-распределения были асимптотически правильными при любых $0 < m/n \leqslant 1$. Положим $m/n = w$. Как известно (см., например, [2]), нормальное приближение для квантили B-распределения имеет вид $\beta \sim [w/(1+w)]\,[1 + \xi/\sqrt{nw(1+w)}]$, где ξ — соответствующая квантиль нормального распределения с параметрами (0,1). Если $w = \text{const}$ и $n \to \infty$, то $N = 4n + 2m - 2 \to \infty$, $m \to \infty$, и нормальное приближение отличается от точной квантили B-распределения величиной порядка N^{-1}. Соответствующая асимптотическая формула для χ^2 имеет вид: $\chi^2 = 2m + 2\xi\sqrt{m} + O(1)$. Таким образом, если в (3) заменить χ^2 его асимптотическим выражением и результат вычесть из нормального приближения, то получим

$$\beta - \beta^* \sim \frac{\xi}{(1+w)^2}\sqrt{\frac{2w(2+w)}{N}}\left[\sqrt{1+w} - \frac{8+8w+w^2}{4(2+w)}\right]. \qquad (4)$$

Если $w \to 0$, то из (4) следует, что

$$\beta - \beta^* \sim -\frac{w^{3/2}}{64}\frac{\xi}{\sqrt{N}},$$

если же $w \to 1$, то

$$\beta - \beta^* \sim -\frac{\sqrt{6}\,(17 - 12\sqrt{2})}{48}\frac{\xi}{\sqrt{N}}\left[1 - \frac{4+3\sqrt{2}}{3}(1-w)\right] =$$

$$= -0{,}0015\,\frac{\xi}{\sqrt{N}}\left[1 - 2{,}7475\,(1-w)\right]. \qquad (5)$$

Следовательно, если отношение $w = m/n$ близко к единице и требуется вычислить заданную верхнюю квантиль B-распределения, то к приближенному выражению (3) следует добавить поправку (5). Пусть, например, требуется вычислить 99,5% — квантиль B-распределения с параметрами $m = n = 20$. Так как в данном случае $w = 1$ и вычисляется верхняя квантиль, то Пуассоновское приближение ненадежно; точность нормального приближения будет лишь удовлетворительной, так как n мало. Действительно, в этом примере $\chi^2 = 66{,}766$, $\xi = 2{,}5758$ и точное значение искомой квантили (см. [9]) равно $\beta = 0{,}6966$, поэтому Пуассоновское приближение $\chi^2/2(n+m-1) = 0{,}8560$ имеет относительную ошибку, превышающую 20%, а нормальное приближение $(1 + \xi/\sqrt{2n})/2 = 0{,}7036$ имеет относительную ошибку, превышающую 1%. Применяя формулу (3), получим $\beta^* = 0{,}6972$ (относительная ошибка менее 0,1%) или — с поправкой (5) — 0,6968 (относительная ошибка менее 0,03%).

Поступила в редакцию
29.12.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Н. Большев, О преобразованиях случайных величин, Теория вероят. и ее примен., IV, 2 (1959), 136—149.
[2] И. В. Дунин-Барковский и Н. В. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика в технике. Общая часть, ГИТТЛ, М., 1955.
[3] В. С. Кравченко, В. Е. Ульященко, Вестник электропромышленности, 9 (1958), 69—74.
[4] C. J. Clopper and E. S. Pearson, Biometrika, 26 (1934), 404—413.
[5] Girshik, Mosteller, Savage, Ann. Math. Statist., 17 (1946), 13—23.
[6] A. Hald, Statistical tables and formulas, Wiley, N. Y., 1952.
[7] J. B. S. Haldane, Biometrika, 33, 3 (1945), 222—225.
[8] H. E. Soper, Tract for computers, 7, Cambridge University Press, London, 1921.
[9] C. M. Thompson, Biometrika, 32, 3 (1941), 151—181.

ON ESTIMATES OF PROBABILITIES

L. N. BOLSHEV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

The problem of estimating an unknown probability in a series of independent trials is dealt with. The experimental plan differs from the Bernoulli scheme. It is proved that the Clopper-Pearson method is applicable for the construction of interval estimate in an extensive class of sequential type plans. The point and interval estimators for the Polia scheme probability (negative-binomial distribution) may serve as an example.

An approximate formula for confidential limits is given. This is an asymptotical formula of percentage points of a B-distribution. The precision of this formula is greater than the corresponding normal and Poisson approximates.

О РАСЧЛЕНЕННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

Важную роль в позиционных играх играет теорема Куна ([1], см. также [2]), устанавливающая для игрока с полной памятью эквивалентность каждой из его смешанных стратегий некоторой соответствующей ей стратегии поведения. Распространение теоремы Куна на случай упорядочивающей памяти игрока было сделано автором в [3]. Некоторое обобщение теоремы Куна в другом направлении было дано Томпсоном в [4].

Для получения более сильных результатов необходимо детальнее рассмотреть особенности памяти игрока.

Далее под позиционной структурой понимается, как обычно (см., напр., [5]) позиционная игра, определенная с точностью до выигрышей игроков в окончательных позициях, или, что по существу то же самое, класс всех позиционных игр, отличающихся только выигрышами игроков.

Понятия информационных множеств, их перекрываемости (см. [5]), стратегий игроков и эквивалентности стратегий, не будучи связанными с выигрышами игроков, относятся именно к позиционным структурам.

Если C — некоторая структура, то информационные множества U и V игрока i называются *связанными* (обозначение: $U \approx V$), если одно из них перекрывает другое. Эти

множества называются *слабо связанными* (обозначение: $U \sim V$), если $U = V$ или если существует такая последовательность информационных множеств $U = W_1, \ldots, W_k = V$, что $W_s \approx W_{s+1}$ $(s = 1, \ldots, k-1)$. Отношение слабой связанности, будучи отношением эквивалентности, разбивает все информационные множества на классы, называемые *компонентами памяти* игрока.

Лемма 1. *Если U' и U'' — информационные множества, принадлежащие одной компоненте памяти $\mathfrak{T}$ игрока, $X' \in U'$, $X'' \in U''$ и $X' < Y < X''$, причем позиция Y принадлежит информационному множеству V того же игрока, то $V \in \mathfrak{T}$.*

Лемма 2. *Если $\mathfrak{T}$ — компонента памяти, а $V \in \mathfrak{U}_i \setminus \mathfrak{T}$, то из $V < \bigcup \mathfrak{T}$ следует $\bigcup \mathfrak{T} \subset D(V, \nu_V)$ при некоторой альтернативе ν_V.*

На основе этих лемм можно доказать следующие утверждения.

Пусть $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ — две компоненты памяти игрока. Положим $\mathfrak{T}_1 < \mathfrak{T}_2$, если $\bigcup \mathfrak{T}_1 < \bigcup \mathfrak{T}_2$.

Теорема 1. *Отношение $<$ на множестве компонент памяти является отношением упорядочения сверху (т. е., таким частичным упорядочением, что из $\mathfrak{T}' < \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'' < \mathfrak{T}$ следует либо $\mathfrak{T}' \leqslant \mathfrak{T}''$, либо $\mathfrak{T}'' \leqslant \mathfrak{T}'$).*

Стратегия игрока, рассматриваемая на некотором семействе его информационных множеств $\mathfrak{V}$ называется его $\mathfrak{V}$-частичной стратегией. Для $\mathfrak{V}$-частичной стратегии τ положим $\operatorname{Poss} \tau = \bigcup_{\pi \in \Pi_\tau} \operatorname{Poss} \pi$, где через Π_τ обозначено множество всех чистых стратегий игрока, совпадающих на $\mathfrak{V}$ с τ.

Теорема 2. *Если $\mathfrak{T}$ — компонента памяти i, X, $Y \in \bigcup \mathfrak{T}$, $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}_i \setminus \mathfrak{T}$, а τ — некоторая $\mathfrak{V}$-частичная стратегия i, то из $X \in \operatorname{Poss} \tau$ следует $Y \in \operatorname{Poss} \tau$.*

Эта теорема является аналогом известной эквивалентности двух определений полной памяти.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{T}'$ и $\mathfrak{T}''$ — две компоненты памяти i, причем $\mathfrak{T}'$ непосредственно предшествует $\mathfrak{T}''$, а $\underline{\mathfrak{T}}'$ и $\underline{\mathfrak{T}}''$ — соответственно множества минимальных позиций в $\bigcup \mathfrak{T}'$ и $\bigcup \mathfrak{T}''$. Тогда при любой стратегии π для того, чтобы $\mathfrak{T}'' \subset \operatorname{Poss} \pi$ необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, $\underline{\mathfrak{T}}' \subset \operatorname{Poss} \pi$, а, во-вторых, для любого $U \in \mathfrak{T}'$ (если только $U < \bigcup \mathfrak{T}''$) $\pi(U) = \nu_U^X$, где X — произвольная позиция из $\mathfrak{T}''$.*

Переходим к формулировке основного результата.

Пусть C — произвольная структура, $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}_i$, а τ — некоторая $\mathfrak{V}$ — частичная стратегия i. Рассматривая множество позиций $\operatorname{Poss} \tau$, мы приходим к некоторой структуре $C(\tau)$ (аналогичные рассуждения в одном частном случае см. в [4]).

Пусть теперь μ — некоторая смешанная стратегия i в структуре C. Возьмем произвольно $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}_i$ и построим по μ смешанную $\mathfrak{V}$-частичную стратегию $\mu_{\mathfrak{V}}$, положив для любой чистой $\mathfrak{V}$-частичной стратегии τ

$$\mu_{\mathfrak{V}}[\tau] = \mu[\tau] = \sum_{\pi \mid \mathfrak{V} = \tau} \mu[\pi].$$

Пусть, далее, $\mathfrak{T}_1(\tau), \ldots, \mathfrak{T}_{t_\tau}(\tau)$ — компоненты памяти игрока i в структуре $C(\tau)$. Обозначим через $\underline{\mathfrak{T}}_s$ множество всех минимальных позиций $\bigcup \mathfrak{T}_s(\tau)$.

Построим по заданной смешанной стратегии μ смешанные $\mathfrak{T}_s(\tau)$-частичные стратегии $\mu_s(\tau)$ $(s = 1, \ldots, t_\tau)$, полагая для всякой чистой $\mathfrak{T}_s(\tau)$-частичной стратегии π_s

$$\mu_s(\tau)[\pi] = \frac{\mu[\tau \cap \underline{\mathfrak{T}}_s \cap \pi_s]}{\mu[\tau \mid \underline{\mathfrak{T}}_s]},$$

если $\mu[\tau \cap \mathfrak{T}_s] \neq 0$,

$$\mu_s(\tau)[\pi] = \frac{\mu[\tau \cap \pi_s]}{\mu[\tau]},$$

если $\mu[\tau \cap \underline{\mathfrak{T}}_s] = 0$, но $\mu[\tau] \neq 0$, и приняв в качестве $\mu_s(\tau)$ произвольную смешанную $\mathfrak{T}_s(\tau)$-частичную стратегию i, если $\mu[\tau] = 0$.

По смешанным частичным стратегиям $\mu_s(\tau)$ $(s = 1, \ldots, t_\tau)$ сконструируем для каждого $\tau \in \Pi_{\mathfrak{B}}$ смешанную $\mathfrak{U}_i(\tau)$ — частичную стратегию $m_{\mathfrak{B}}(\mu, \tau)$, полагая для любой чистой $\mathfrak{U}_i(\tau)$-частичной стратегии π^* игрока i

$$m_{\mathfrak{B}}(\mu, \tau)[\pi^*] = \prod_{s=1}^{t_\tau} \mu_s(\tau)[\pi^* \mid \mathfrak{T}_s(\tau)].$$

Продолжив каждую из полученных стратегий произвольным образом до смешанной $\mathfrak{U}_i \setminus \mathfrak{B}$-частичной стратегии i, построим по частичным стратегиям $\mu_{\mathfrak{B}}$ и $m_{\mathfrak{B}}(\mu, \tau)$ $(\tau \in \Pi_{\mathfrak{B}})$ смешанную стратегию $m_{\mathfrak{B}}(\mu)$, положив для любой чистой стратегии π

$$m_{\mathfrak{B}}(\mu)[\pi] = \mu_{\mathfrak{B}}[\pi_{\mathfrak{B}}]\, m_{\mathfrak{B}}(\mu, \pi_{\mathfrak{B}})[\pi_{\mathfrak{U}_i \setminus \mathfrak{B}}]$$

и объявив аддитивность этой функции на множестве всех чистых стратегий i.

Все получаемые так стратегии вида $m_{\mathfrak{B}}(\mu)$ назовем *расчлененными относительно* $\mathfrak{B}$ стратегиями, соответствующими смешанной стратегии μ.

Теорема 3 (теорема об эквивалентности). *Всякая смешанная стратегия игрока эквивалентна любой соответствующей ей расчлененной стратегии относительно произвольного семейства информационных множеств* $\mathfrak{B}$.

Частными случаями этой теоремы являются теорема Куна о стратегиях поведения и теорема Томпсона о сигнальных стратегиях.

Поступила в редакцию
8.10.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. W. Kuhn, Extensive games and the problem of information, Contribut. to the theory of games. II, Princeton, 1953, 193 — 216.

[2] Н. Н. Воробьев, Конечные бескоалиционные игры, Успехи матем. наук, XIV, 4 (1959), 21—56.

[3] Н. Н. Воробьев, Редуцированные стратегии для игр в обобщенной форме, ДАН СССР, **115**, 5 (1957), 855—857.

[4] G. L. Thompson, Signalling strategies in n-person games, Contribut. to the theory of games. II, Princeton, 1953, 267—277.

[5] B. J. Birch, On games with almost complete information, Proc. Cambridge Philos. Soc., **51**, 2 (1955), 275—287.

ON DISMEMBERED STRATEGIES

N. N. VOROBYEV (*LENINGRAD*)

(*Summary*)

Dismembered strategy is a generalization of the concept of composite strategy proposed by Thompson. Any mixed strategy is equivalent to some dismembered strategy.

Thus, generalizations are obtained of Kuhn's theorem on the behavior of strategies and Thompson's theorem on composite strategies.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СТАРШИХ МОМЕНТОВ. II

В. П. ЛЕОНОВ, А. Н. ШИРЯЕВ

Некоторые предельные теоремы для случайных процессов

Настоящая работа примыкает к [1] и использует обозначения, принятые в последней. Основное содержание ее составляет доказательство факта, известного в технической литературе ([2], [3]) под названием «нормализация широкополосного стационарного процесса при прохождении через узкий фильтр», для процессов класса $\Delta^{(\infty)}$ (см. § 3 в [1]). Аналогичная теорема при других допущениях доказана в [4].

Работа выполнена под руководством А. Н. Колмогорова, которому авторы выражают свою благодарность.

Определение. *Мы скажем, что семейство случайных процессов* $\xi_\alpha(t) \in \mathbf{T}^{(1)}$ *при* $\alpha \to \alpha_0$ *сходится в смысле* $\mathfrak{G}_1$ *к случайному процессу* $\xi(t) \in \mathbf{T}^{(1)}$, *если для любой* $g \in \mathfrak{G}_1$ *распределение случайной величины*

$$(\xi_\alpha,\ g) = \int \xi_\alpha(t)\, g(dt),$$

при $\alpha \to \alpha_0$ *слабо сходится к распределению случайной величины*

$$(\xi,\ g) = \int \xi(t)\, g(dt).$$

Заметим, что из сходимости $\xi_\alpha(t)$ к $\xi(t)$ в смысле $\mathfrak{G}_1$ вытекает слабая сходимость всех конечномерных распределений процесса $\xi_\alpha(t)$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$ (см. [5], стр. 129).

С помощью характеристических функционалов легко получить следующую теорему (ср. [6], стр. 163).

Теорема 1. *Пусть семейство процессов*

$$\xi_\lambda(t) = \int R(t,\ \tau)\, N_\lambda(d\tau)$$

удовлетворяет условиям примера 2 § 1 в [1], *причем* $\mathbf{M} N_\lambda(T) = 0$, $\ln \mathbf{M} e^{i\alpha N_\lambda(T)} = \sigma_\lambda(T)\,\psi(\alpha)$, $\sigma_\lambda(T) = \lambda\sigma(T)$. *Тогда при* $\lambda \to \infty$ *семейство процессов*

$$\eta_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\xi_\lambda(t)$$

сходится в смысле $\mathfrak{G}_1$ *к гауссовскому процессу* $\eta(t)$ *с* $\mathbf{M}\eta(t) = 0$ *и*

$$\mathbf{M}\,\eta(t_1)\,\eta(t_2) = \|\mathbf{K}\| \int R(t_1,\ \tau)\, R(t_2,\ \tau)\, \sigma(d\tau),$$

где $\|\mathbf{K}\| = \int \mathbf{K}(dx)$.

Доказательство. Воспользовавшись формулами (1.14), (1.17), (1.19) из [1] и формулой Тейлора, получим

$$\ln \chi_{\eta_\lambda}(g) = \int\int \exp\left\{ i\,\frac{\gamma(\tau)\,x}{\sqrt{\lambda}} - 1 - i\,\frac{\gamma(\tau)\,x}{\sqrt{\lambda}} \right\} \frac{\mathbf{K}(dx)}{x^2}\,\lambda(\sigma)(d\tau) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\int (\gamma(\tau))^2 \left[\cos\left(\theta\,\frac{\gamma(\tau)\,x}{\sqrt{\lambda}}\right) + i \sin\left(\theta'\,\frac{\gamma(\tau)\,x}{\sqrt{\lambda}}\right) \right] \mathbf{K}(dx)\,\sigma(d\tau) \underset{\lambda\to\infty}{\to}$$

$$\to -\frac{1}{2}\int\int (\gamma(\tau))^2\, \mathbf{K}(dx)\,\sigma(d\tau) = -\frac{\|\mathbf{K}\|}{2}\int\int g(dt_1)\, g(dt_2) \int R(t_1,\ \tau)\, R(t_2,\ \tau)\, \sigma(d\tau),$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta' \leqslant 1$. Что и доказывает теорему.

Аналогичная теорема имеет место и для процесса обобщенного дробового эффекта (пример 3 § 1 в [1]).

В технической литературе неоднократно рассматривался вопрос о «нормализации широкополосного стационарного процесса при прохождении через узкий фильтр» (см., например, [2], [3]). Однако никаких точных теорем по этому поводу до недавнего времени не существовало. При некоторых ограничениях на процесс, математически строгое доказательство этого факта приведено в [4]. Ниже мы докажем две теоремы, описывающие указанный выше факт, при ограничениях на процесс, не совпадающих с ограничениями, наложенными в [4]; легко привести примеры процессов, подчиненных ограничениям, наложенным в [4], и не подчиненных приведенным ниже ограничениям, и наоборот. Приведенные ниже ограничения легко проверяемы.

Теорема 2. *Пусть*: 1) $\xi(t) \in \Delta^{(\infty)}$, $\mathbf{M}\xi(t) = 0$, $|f_\xi^{(k)}(\lambda)| \leqslant A_{k<\infty}$, $k \geqslant 2$ *и* $f(\lambda) = f_\xi^{(2)}(\lambda, -\lambda)$ *непрерывна в точках* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\lambda_j \geqslant 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$. 2) $G_\alpha^{(j)}(\lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ — *семейство комплексных борелевских функций таких, что*

a) $G_\alpha^{(j)}(-\lambda) = \overline{G_\alpha^{(j)}(\lambda)}$,

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |G_\alpha^{(j)}(\lambda)|^2 d\lambda = 1$,

c) *существуют* λ_0, C, *не зависящие от* j *и* α *такие, что для* $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ *при всех* j, α $|G_\alpha^{(j)}(\lambda)| < \dfrac{C}{|\lambda|}$

d) *для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha \to \alpha} \int\limits_{\substack{|\lambda+\lambda_j|>\varepsilon \\ |\lambda-\lambda_j|>\varepsilon}} |G_\alpha^{(j)}(\lambda)|^2 d\lambda = 0.$$

Тогда случайный вектор

$$\gamma_\alpha^{(j)} = \int G_d^{(j)}(\lambda) X_\xi(d\lambda), \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

при $\alpha \to \alpha_0$ *асимптотически нормален с нулевыми средними и корреляционной матрицей:*

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_1), & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & f(\lambda_2), & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются следующие две леммы:

Лемма 1. *Для любых* $1 \leqslant j \leqslant n$, $-\infty < a < b < \infty$ $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \int\limits_a^b |G_\alpha^{(j)}(\lambda)| d\lambda = 0$.

Доказательство леммы 1 основано на условиях b) и d) теоремы 2.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi_\alpha(\lambda)$ — *семейство комплексных борелевских функций таких, что*

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_\alpha(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant B$, B *не зависит от* α,

b) *для любых* $-\infty < a < b < \infty$

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int\limits_a^b |\varphi_\alpha(\lambda)| d\lambda = 0,$$

c) *существуют* λ_0, C, *не зависящие от* α, *такие, что для* $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ *при всех* α

$$|\varphi_\alpha(\lambda)| < \frac{C}{|\lambda|}.$$

Тогда при $k > 2$

$$I(\alpha) = \underbrace{\int \cdots \int}_{k-1} |\varphi_\alpha(\lambda_1)| \ldots |\varphi_\alpha(\lambda_{k-1})| |\varphi_\alpha(-\lambda_1 - \ldots - \lambda_{k-1})| d\lambda_1 \ldots d\lambda_{k-1} \underset{\alpha \to \alpha_0}{\to} 0.$$

Доказательство леммы 2. Перепишем $I(\alpha)$ в символическом виде (см. § 3 в [1])

$$I(\alpha) = \underbrace{\int \cdots \int}_{k} \delta(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) |\varphi_\alpha(\lambda_1)| \ldots |\varphi_\alpha(\lambda_k)| d\lambda_1 \ldots d\lambda_k.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть λ_ε таково, что $\lambda_\varepsilon \geqslant \lambda_0$ и

$$\int_{|\lambda_1| \geqslant \lambda_\varepsilon} \cdots \int_{|\lambda_k| \geqslant \lambda_\varepsilon} \delta(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) \frac{C^k}{|\lambda_1| \ldots |\lambda_k|} d\lambda_1 \ldots d\lambda_k < \varepsilon. \tag{1}$$

Такое $\lambda_\varepsilon < \infty$ существует, так как

$$\int_{\substack{|\lambda_1| \geqslant 1 \ldots |\lambda_{k-1}| \geqslant 1 \\ |\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}| \geqslant 1}} \cdots \int \frac{d\lambda_1 \ldots d\lambda_{k-1}}{|\lambda_1| \ldots |\lambda_{k-1}| |\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}|} < \infty.$$

Обозначим: $E_j(\varepsilon) = \{\lambda_j : |\lambda_j| < \lambda_\varepsilon\}$, $\overline{E}_j(\varepsilon) = R \setminus E_j(\varepsilon)$. Очевидно, что

$$I(\alpha) = \sum_{\beta, \ldots, \beta_k} I^{(\alpha)}_{\beta, \ldots, \beta_k},$$

где $\sum_{\beta_1 \ldots \beta_k}$ означает суммирование по всем возможным последовательностям $\beta_1, \ldots, \beta_k$ $\beta_j = 0,1$,

$$I_{\beta_1 \ldots \beta_k}(\alpha) = \int_{E_{\beta_1}} \cdots \int_{E_{\beta_k}} \delta(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) |\varphi_\alpha(\lambda_1)| \ldots |\varphi_\alpha(\lambda_k)| d\lambda_1 \ldots d\lambda_k,$$

$$E_{\beta_j} = \begin{cases} E_j(\varepsilon), \text{ если } \beta_j = 0, \\ \overline{E}_j(\varepsilon), \text{ если } \beta_j = 1. \end{cases}$$

По свойству c), при $\lambda \in \overline{E}_1(\varepsilon) \times \ldots \times \overline{E}_k(\varepsilon)$ имеем:

$$\prod_{j=1}^{k} |\varphi_\alpha(\lambda_j)| \leqslant \frac{C^k}{|\lambda_1| \ldots |\lambda_k|}.$$

Поэтому из (1) вытекает: $I_{1 \ldots 1}(\alpha) < \varepsilon$ для всех α.

Используя условия леммы 2, путем несложных оценок нетрудно показать, что если хотя бы одно $\beta_j = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} I_{\beta_1 \ldots \beta_k}(\alpha) = 0.$$

Следовательно, $\lim_{\alpha \to \alpha_0} I(\alpha) = 0$ и лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные вещественные числа,

$$\varphi_\alpha(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} a_j G^{(j)}_\alpha(\lambda), \quad \zeta_\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j \eta^{(j)}_\alpha.$$

По условию $M\zeta_\alpha = 0$. По формуле (2.3) в [1], семиинварианты $s_{\zeta_\alpha}^{(k)}$ случайной величины ζ_α при $k \geqslant 2$ имеют вид:

$$s_{\zeta_\alpha}^{(k)} = \int_{R^k} \delta(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)\, \varphi_\alpha(\lambda_1) \ldots \varphi_\alpha(\lambda_k)\, f_\xi^{(k)}(\lambda)\, d\lambda.$$

Из леммы 1 следует, что $\varphi_\alpha(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2. Поэтому при $k > 2$, по лемме 2,

$$|s_{\zeta_\alpha}^{(k)}| \leqslant A_k \int_{R^k} \delta(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)\, |\varphi_\alpha(\lambda_1)| \ldots |\varphi_\alpha(\lambda_k)|\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_k \underset{\alpha \to \alpha_0}{\to} 0.$$

В то же время,

$$s_{\zeta_\alpha}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_\alpha(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda.$$

Используя условия в) и d) теоремы 2 и непрерывность $f(\lambda)$ в λ_j, нетрудно показать, что

$$s_{\zeta_\alpha}^{(2)} \underset{\alpha \to \alpha_0}{\to} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 f(\lambda_j).$$

Следовательно, моменты ζ_α при $\alpha \to \alpha_0$ сходятся к моментам нормального распределения с параметрами $\left(0, \sum_{j=1}^{n} a_j^2 f(\lambda_j)\right)$; откуда вытекает (см. [7]), что распределение ζ_α при $\alpha \to \alpha_0$ слабо сходится к нормальному распределению с параметрами $\left(0, \sum_{j=1}^{n} a_j^2 f(\lambda_j)\right)$. Так как это справедливо при любых $a_1, \ldots, a_n$, то отсюда следует утверждение теоремы (см. [5], стр. 129).

Рассмотрим теперь следующее преобразование над стационарным процессом $\xi(t)$. Пусть α — вещественный параметр и

$$\eta_\alpha(t) = \sqrt{\alpha}\, \xi(\alpha t). \tag{2}$$

Пусть спектральное представление процесса $\eta_\alpha(t)$ имеет вид:

$$\eta_\alpha(t) = \int e^{i\lambda t} Y_\alpha(d\lambda). \tag{3}$$

Рассмотрим процесс:

$$\zeta_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} G(\lambda)\, Y_\alpha(d\lambda); \tag{4}$$

где $G(\lambda)$ такова, что (4) имеет смысл.

Теорема 3. *Пусть* $\xi(t) \in \Delta^{(\infty)}$, $M\xi(t) = 0$, $|f_\xi^{(k)}(\lambda)| \leqslant A_k$, $(k \geqslant 2)$, $f(\lambda) = f_\xi^{(2)}(\lambda)$, — *непрерывна при* $\lambda = 0$ *и* $f(0) = f_0 > 0$; $G(\lambda)$ — *борелевская функция такая, что:*

a) $G(-\lambda) = G(\lambda)$,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} |G(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$,

c) *существуют* λ_0, C *такие, что для* $|\lambda| \geqslant \lambda_0$

$$|G(\lambda)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

Тогда семейство процессов $\zeta_\alpha(t)$, *определенное формулами* (2), (3), (4), *при* $\alpha \to \infty$ *сходится в смысле* $\mathfrak{S}_1$ *к гауссовскому стационарному процессу со средним ноль и спектральной плотностью* $f_0 |G(\lambda)|^2$.

Доказательство. Легко подсчитать, что

$$f^{(k)}_{\zeta_\alpha}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \alpha^{\frac{k}{2}-(k-1)} G(\lambda_1) \ldots G(\lambda_k) f^{(k)}_\xi(\lambda_1, \ldots \lambda_k).$$

Поэтому для каждого $g \in \mathfrak{S}_1$ при $k > 2$

$$|s^{(k)}_{(\zeta_\alpha, g)}| = \alpha^{\frac{k}{2}-(k-1)} \left| \int_{R^k} \delta(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) G(\lambda_1) \ldots G(\lambda_k) z(\lambda_1) \ldots z(\lambda_k) \times \right.$$

$$\left. \times f^{(k)}_\xi\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\lambda_k}{\alpha}\right) d\lambda_1 \ldots d\lambda_k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^{\frac{k}{2}-(k-1)} \|g\|^k A_k \int_{R^{k-1}} |G(\lambda_1)| \ldots |G(\lambda_{k-1})| \, |G(-\lambda_1 - \cdots - \lambda_{k-1})| \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{k-1} \underset{\alpha \to \infty}{\to} 0.$$

В то же время,

$$s^{(2)}_{(\zeta_\alpha, g)} = \int |G(\lambda)|^2 |z(\lambda)|^2 f\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) d\lambda \underset{\alpha \to \infty}{\to} f_0 \int |G(\lambda)|^2 |z(\lambda)|^2 d\lambda$$

и теорема доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию 24.11.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Ширяев, Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов, I, Теория вероят. и ее примен., **V**, 3 (1960).
[2] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы, Автоматика и телемеханика, XIV, 2 (1953).
[3] Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, Сов. радио, М., 1957.
[4] В. А. Волконский, Ю. А. Розанов, Некоторые предельные теоремы для случайных функций, I, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 2 (1959), 186—207.
[5] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, М., 1947.
[6] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953.
[7] M. Frechet and I. Shohat, A proof of the generalized second-limit theorem in the theory of probability, TAMS, **33**, 2 (1931).

SOME PROBLEMS IN THE SPECTRAL THEORY OF HIGHER-ORDER MOMENTS. II

V. P. LEONOV, A. N. SHIRYAEV (MOSCOW)

(*Summary*)

This paper essentially contains a proof of the problem known in the technical literature as «The normalization of a wide-band stationary process when passing through a narrow-band filter» for processes of class $\Delta^{(\infty)}$.

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕОГРАНИЧЕННО-ДЕЛИМЫМИ ЗАКОНАМИ

Ю. П. СТУДНЕВ

В настоящей заметке рассматриваются вопросы, близкие к рассмотренным в статьях [2], [3] и [4]. В отличие от этих работ в ней не ставится целью получение *равномерных* оценок, как это делается в работе [3], или в статье [4]. Приводимые ниже теоремы дают представление о скорости сближения распределений сумм одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин с множеством всех неограниченно-делимых законов, причем полученные верхние оценки, как это вытекает из метода доказательства, зависят от функции распределения этих величин. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$, характеристической функцией $f(t)$, нулевым средним значением и дисперсией, равной единице. Положим

$$s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \tag{2}$$

$$F^n(x) = \mathbf{P}\{s_n < x\}, \quad F_n(x) = \mathbf{P}\{s_n < x\sqrt{n}\}.$$

Обозначим $\mathfrak{G}$ множество всех неограниченно-делимых законов и введем расстояние $\rho(F; \mathfrak{G})$ между $F(x)$ и множеством $\mathfrak{G}$

$$\rho(F; \mathfrak{G}) = \inf_{G \in \mathfrak{G}} \sup_x |F(x) - G(x)|. \tag{3}$$

В связи с изучением скорости сближения функций $F^n(x)$ с множеством $\mathfrak{G}$ нас будут интересовать верхние оценки расстояния $\rho(F_n; \mathfrak{G})$. Основная идея метода получения этих оценок состоит в выборе в качестве представителя множества $\mathfrak{G}$ композиции так называемых *сопровождающих* неограниченно-делимых законов, характеристические функции $\psi(t)$ которых определяются как

$$\psi(t) = \exp[f(t) - 1]. \tag{4}$$

Именно, случайным величинам s_n сопоставляются суммы $\sigma_n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ с характеристической функцией (4). Обозначим $\Psi_n(x) = \mathbf{P}\{\sigma_n < x\sqrt{n}\}$. Тогда

$$\rho(F_n; \mathfrak{G}) \leqslant \rho(F_n; \Psi_n) = \sup_x |F_n(x) - \Psi_n(x)|.$$

Для дальнейшего нам потребуется теорема Эссеена ([1], теорема 2а *) и две леммы.

Лемма 1**. *Если функция распределения $F(x)$ не является решетчатой, то существует такая функция $\lambda(n)$, $\lim_{n\to\infty} \lambda(n) = \infty$, что каково бы ни было число $\delta > 0$*

$$\int_{\delta}^{\lambda(n)} \frac{|f^n(t)|}{t}\, dt = o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Лемма 2. *Пусть $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения с параметрами $(0, 1)$, $F_n^*(x) = F_n(x) * \Phi(\sqrt{n}x)$ и характеристическая функция $f(t)$, соответствующая распределению $F(x)$, удовлетворяет условию (свойство С по Крамеру)*

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| < 1, \tag{5}$$

тогда

$$\rho(F_n; F_n^*) = O(n^{-1}).$$

* Эта теорема приведена в книге [5] с тем отличием, что условие 2 отсутствует у Эссеена (прим. ред.)

** См. [1], лемма 1, стр. 49.

Доказательство. Функция $F_n^*(x)$ имеет плотность $\varphi_n^*(x)$ причем, как легко показать, $|\varphi_n^*(x)| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}$. В вышеупомянутой теореме Эссеена полагаем

$$T = n^{3/2}, \quad F(x) = F_n(x), \quad G(x) = F_n^*(x), \quad A = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Учитывая, что для достаточно малого $\delta > 0$ при $|t| \leqslant \delta\sqrt{n}$ выполняется неравенство $\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^n \leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}$ и что, в силу условия (5), существует такая постоянная $c > 0$, что при $|t| > \delta$ выполняется неравенство $|f(t)| < e^{-c}$, величину ε в теореме Эссеена оцениваем следующим образом

$$\varepsilon = \int_{-T}^{T} \frac{\left|f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\cdot e^{-\frac{t^2}{2n}}\right|}{|t|}\,dt \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant\delta\sqrt{n}} \left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^n \left(1 - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right)\frac{dt}{|t|} +$$

$$+ 2\int\limits_{\delta\sqrt{n} < |t| \leqslant n^{3/2}} \left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^n \frac{dt}{|t|} = O(n^{-1}).$$

Следовательно

$$\rho(F_n;\ F_n^*) = O(n^{-1}).$$

Замечание. Очевидно, что в условиях леммы 2, функция $\psi(t)$ также удовлетворяет условию (5). Поэтому для функций $\Psi_n^*(x) = \Psi_n(x) * \Phi(\sqrt{n}\,x)$ справедлива такая же оценка $\rho(\Psi_n,\ \Psi_n^*) = O(n^{-1})$.

Теорема 1. *Если случайные величины* (1) *удовлетворяют условию* (5), *то*

$$\rho(F_n;\ \Phi) = O(n^{-1}).$$

Доказательство. Введя функции $F_n^*(x)$ и $\Psi_n^*(x)$ таким же образом, как и в лемме 2, получаем очевидное неравенство

$$\rho(F_n;\ \Psi_n) \leqslant \rho(F_n;\ F_n^*) + \rho(F_n^*;\ \Psi_n^*) + \rho(\Psi_n^*;\ \Psi_n).$$

Первый и третий члены правой части в силу леммы 2 имеют нужный порядок $O(n^{-1})$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить такой же порядок для второго члена.

Выберем δ, $0 < \delta < 1$, так, чтобы при $|t| \leqslant \delta$ выполнялось неравенство

$$\left|f(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}.$$

Тогда при $|t| \leqslant \delta\sqrt{n}$

$$\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant 1 - \frac{t^2}{4n} \leqslant e^{-\frac{t^2}{4n}},$$

$$\left|\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant e^{\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| - 1} \leqslant e^{-\frac{t^2}{4n}}$$

и следовательно

$$|f_n^*(t) - \psi_n^*(t)| = \left|f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \psi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| e^{-\frac{t^2}{2n}} \leqslant$$

$$\leqslant n\left|f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \cdot e^{-\frac{(n-1)t^2}{4n}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2n}} \leqslant \frac{n}{2}\left|1 - f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{4}} \leqslant \frac{1}{2n}\,t^4 \cdot e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Полагая теперь в теореме Эссеена

$$G(x) = F_n^*(x), \quad F(x) = \Psi_n^*(x), \quad A = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}, \quad T = n^{3/2}$$

легко получаем оценку $\varepsilon = O\left(\frac{1}{n}\right)$ и, следовательно,

$$\rho(F_n^*; \Psi_n^*) = O(n^{-1}).$$

Теорема доказана.

Нижеследующая теорема, являющаяся простым следствием теоремы из [1] (теорема 1, стр. 48), говорит об интересном свойстве сопровождающих законов.

Теорема 2. *Если случайные величины* (1) *имеют конечные моменты четвертого порядка и для них выполнено условие* (5), *то равномерно относительно* x

$$F_n(x) - \Psi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{R(x)}{n} + o(n^{-1}),$$

где $R(x) = \frac{1}{8} x(3 - x^2)$ *не зависит от вида функции* $F(x)$.

Доказательство. Применяя разложение вышеупомянутой теоремы из [1] к функциям $F_n(x)$ и $\Psi_n(x)$, получаем

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Q_1(x)}{n^{1/2}} + \frac{Q_2(x)}{n} \right) + o(n^{-1}),$$

$$\Psi_n(x) - \Phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\widetilde{Q}_1(x)}{n^{1/2}} + \frac{\widetilde{Q}_2(x)}{n} \right) + o(n^{-1}),$$

где, как легко установить

$$Q_1(x) = \widetilde{Q}_1(x), \qquad Q_2(x) = \widetilde{Q}_2(x) + R(x).$$

Отсюда и вытекает справедливость утверждения теоремы. Ослабление условий налагаемых на величины (1) ведет к ухудшению оценок, получаемых с помощью сопровождающих законов. В этом направлении можно привести следующие результаты:

Теорема 3. *Если случайные величины* (1) *не являются решетчатыми, то*

$$\rho(F_n; \Phi) = o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Доказательство этой теоремы в основных чертах повторяет доказательство теоремы 1. Нужный порядок получается с помощью леммы 1.

При переходе к решетчатым законам в общем случае сопровождающие законы уже не позволяют получать оценки лучшие, чем $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$, как показывает следующий

Пример. Известно, что если случайные величины (1) принимают значения только вида $a + hv$ ($v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), где h — максимальный шаг, имеют конечный момент третьего порядка, то равномерно относительно x имеет место разложение

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}} + \frac{S_1(x)}{\sqrt{n}} \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где

$$S_1(x) = S\left(\frac{\sqrt{n}\,x - an}{h}\right) \cdot h, \quad S(z) = [z] - z + \frac{1}{2}$$

([1], теорема 3 стр. 56).

Пусть величины (1) могут принимать лишь два значения -1 и $+1$ оба с вероятностью $\frac{1}{2}$. Очевидно, что в этом случае $M\xi = 0$, $D\xi = 1$, $h = 2$, $a = -1$. Применение разложения (6) к функциям $F_n(x)$ и $\Psi_n(x)$ и рассуждения, подобные тем, что проводились при доказательстве теоремы 2 дают следующий результат: при четных n

$$F_n(0) - \Psi_n(0) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Однако имеет место следующая

Теорема 4. *Если случайные величины* (1) *имеют решетчатое распределение с возможными значениями* $a + hv$ $(v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $(h$ — *максимальный шаг) и конечным моментом третьего порядка, то для того, чтобы равномерно относительно* x *выполнялось соотношение*

$$F_n(x) - \Psi_n(x) = o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),$$

необходимо и достаточно чтобы a *было кратно* h.

Доказательство этой теоремы основано на применении разложения (6) и на элементарном доказательстве того, что для решетчатости сопровождающего закона $\Psi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы a было целым кратным h. Недавно Д. В. Гусак получил следующий результат:

Теорема 5. *Если случайные величины* (1) *имеют решетчатое распределение, то*

$$\rho(F_n;\ \mathfrak{G}) = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Если же дополнительно $\frac{a}{n}$ — *целое, то*

$$\rho(F_n;\ \mathfrak{G}) = O\left(n^{-1}\right).$$

Нижеследующий результат показывает, что использование сопровождающих законов не может дать оценок лучшего порядка, чем $O(n^{-1})$.

Теорема 6. *Если* $F(x)$ *симметрична, то*

$$\rho(F_n;\ \Psi_n) \geqslant \frac{c}{n},$$

где c — *константа.*

Доказательство. Используя вещественность характеристических функций $f_n(t)$ и $\psi_n(t)$ нетрудно показать, что при любом t

$$f_n(t) \leqslant \psi_n(t), \tag{7}$$

$$\psi_n(t) \geqslant e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{8}$$

Учитывая (7) и (8), для достаточно большого n получим для $|t| \leqslant 1$

$$\psi_n(t) - f_n(t) \geqslant e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{t^4}{64n}.$$

Возьмем теперь функцию $H(x) = \left(\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\right)^4$, для которой $\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx = 1$,

$$h(t) = 2\int\limits_0^{\infty} \cos tx \cdot H(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |t| \geqslant 1, \\ 2(1-|t|^3) & \text{при} \quad \frac{1}{2} \leqslant |t| \leqslant 1, \\ 1 - 6t^2 + 6|t|^3 & \text{при} \quad 0 \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Из

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x-y)\,[\Psi_n(x) - F_n(x)]\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \cos ty\,\frac{\psi_n(t) - f_n(t)}{t}\cdot h(t)\,dt,$$

полагая, $y = 0$, получаем

$$\rho = (\Psi_n;\ F_n) \geqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\psi_n(t) - f_n(t)}{t}\,h(t)\,dt \geqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_{1/2}^{1} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{64n}\,t^3(1-t^3)\,dt = \frac{c}{n}.$$

Теорема доказана.

Поступила в редакцию
5.6.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions. Acta Math., 77 (1945), 1—125.

[2] Ю. В. Прохоров, Некоторые уточнения теоремы Ляпунова, Изв. АН СССР, сер. матем., 16 (1952), 281—292.

[3] А. Н. Колмогоров, Две равномерные теоремы для сумм независимых слагаемых, Теория вероят. и ее примен., I, 4 (1956), 281—292.

[4] И. П. Цареградский, О равномерном приближении биномиального распределения неограниченно-делимыми законами. Теория вероят. и ее примен., III, 4 (1958), 470—474.

[5] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., 1949.

AN APPROXIMATION TO THE DISTRIBUTION OF SUMS BY INFINITELY DECOMPOSABLE LAWS

Yu. P. STUDNEV (UŽGOROD)

(*Summary*)

The paper contains results on estimates of a «uniform distance»

$$\rho(F^n;\ \mathfrak{G}) = \inf_{S \in \mathfrak{G}} \sup_x | F^n(x) - G(x) |,$$

where $F^n(x) = \underbrace{F(x) * F(x) * \ldots * F(x)}_{n}$ and $\mathfrak{G}$ is the set of all infinitely decomposable laws.

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕЛИЧИНЫ ПЕРВОГО ПЕРЕСКОКА

И. Н. КОВАЛЕНКО

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$, и пусть $0 < \mathrm{M}\xi_k < \infty$.

Обозначим $s_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$; $\overline{s}_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} s_k$, $n \geqslant 1$; $s_0 = 0$. Определим $\nu(t)$ посредством соотношения $\overline{s}_{\nu(t)} \leqslant t < s_{\nu(t)+1}$ и назовем величину $\gamma_t(\xi_k) = s_{\nu(t)+1} - t$ величиной первого перескока через уровень t. Представляет интерес нахождение предельного распределения случайной величины γ_t, если t стремится к бесконечности (принимая в случае нерешетчатого распределения ξ_k все положительные значения, а в решетчатом случае — лишь значения, кратные максимальному шагу распределения). Для случайных величин ξ_k, принимающих только положительные значения, данная задача имеет простое решение (см., например, [1]). А. А. Боровков [5] исследовал случай решетчатых конечно значных случайных величин; затем В. С. Королюк высказал предположение, что в общем случае характеристическая (производящая) функция предельного распределения величины первого перескока может быть получена методом факторизации (см., М. Г. Крейн, [2]).

В настоящей заметке при помощи метода факторизации дается простой способ нахождения предельного распределения величины первого перескока; 1° посвящен нерешетчатому, 2° — решетчатому случаю.

1°. Пусть $G(\lambda)$ — функция, определенная для всех вещественных λ. Под факторизацией функции $G(\lambda)$ будем понимать представление $G(\lambda) = G_+(\lambda) G_-(\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$, где $G_\pm(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\pm \operatorname{Im}\lambda > 0$ и не имеет в этой полуплоскости нулей.

Обозначим через $K(\lambda)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_1. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1.

I. *Если* $1 - K(\lambda) \neq 0$, $0 < \lambda < \infty$, *и* $0 < \mathbf{M}\,\xi_k < \infty$, *то предельное распределение при* $t \to \infty$ *величины* γ_t *существует.*

II. *Обозначим* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{M} \exp\{i\lambda\gamma_t(\xi_k)\} = L(\lambda)$. *Тогда существует такая факторизация* $[1 - K(\lambda)]/i\lambda = G_+(\lambda) G_-(\lambda)$, *при которой* $G_+(\lambda) = L(\lambda)$.

Доказательство. Пусть τ_1 — первая положительная величина в последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$; $B(x) = \mathbf{P}\{\tau < x\}$, и пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет $B(x)$ в качестве функции распределения. Тогда, очевидно, для любого $t \geqslant 0$ случайные величины $\gamma_t(\tau_k)$ и $\gamma_t(\eta_k)$ имеют одно и то же распределение. Как известно [3], τ_1 имеет конечное математическое ожидание. Применяя к последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ известный результат для величины перескока уровня t в последовательности положительных случайных величин [1], получим, что предельное распределение $\gamma_t(\tau_k)$ или, что то же $\gamma_t(\xi_k)$, существует, и его характеристическая функция $L(\lambda)$ удовлетворяет соотношению:

$$L(\lambda) = \frac{H(\lambda) - 1}{i\lambda}, \tag{1}$$

где $H(\lambda)$ — характеристическая функция случайной величины η.

Найдем выражение для $H(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{ix\lambda}\, dh(x)$. Для этого введем оператор $[\cdot]_-$, определив его следующим образом:

$$[F]_-(x) = \min\{F(x), F(0)\}.$$

Событие $\{\tau < x\}$, $x > 0$ может осуществляться следующими способами: а) $\xi_1 \in (0, x)$, б) для некоторого $n \geqslant 1$ $s_k \leqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $s_n = y \leqslant 0$; $-y < \xi_{n+1} < x - y$. Поэтому

$$h(x) = F(x) - F(0) + \int\limits_{-\infty}^{0} [F(x-y) - F(-y)]\, dF(y) + \ldots + \int\limits_{y_1\leqslant 0,\ldots,y_1+\ldots+y_n\leqslant 0} \cdots \int \times$$

$$\times [F(x - y_1 - \ldots - y_n) - F(-y_1 - \ldots - y_n)]\, dF(y_1) \ldots dF(y_n) + \ldots = F(x) +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} F(x-y)\, dF(y) + \ldots + \int\limits_{y_1\leqslant 0,\ldots,y_1+\ldots+y_n\leqslant 0} \cdots \int F(x - y_1 - \ldots - y_n)\, dF(y_1) \ldots dF(y_n) +$$

$$+ \ldots - \left\{ F(0) + \int\limits_{-\infty}^{0} F(-y)\, dF(y) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \int\limits_{y_1\leqslant 0,\ldots,y_1+\ldots+y_n\leqslant 0} \cdots \int F(-y_1 - \ldots - y_n) dF(y_1) \ldots dF(y_n) + \ldots \right\}; \tag{2}$$

$$h(x) = F(x) + [F]_- * F(x) + [[F]_- * F]_- * F(x) + \ldots + [\ldots [F]_- * \ldots]_- * F(x) + \ldots -$$
$$- \{F(0) + [F]_- * F(0) + [[F]_- * F]_- * F(0) + \ldots + [\ldots [F]_- * \ldots]_- * F(0) + \ldots\} =$$
$$= F(x) + F * [F + [F]_- * F + \ldots + [\ldots [F]_- * \ldots]_- * F + \ldots]_-(x) -$$
$$- \{F(0) + F * [F + [F]_- * F + \ldots + [\ldots [F]_- * \ldots]_- * F + \ldots]_-(0)\}. \quad (3)$$

Определив правой частью формулы (2) (или (3)), функцию $h(x)$ также и для отрицательных x, получим:

$$h(x) = F(x) + F * [h]_-(x) - F(0) - F * [h]_-(0). \quad (4)$$

Произведенные формальные преобразования законны, поскольку для $x < 0$ выражение

$$0 \leqslant F(x) + [F]_- * F(x) + [[F]_- * F]_- * F(x) + \ldots \leqslant F(0) +$$
$$+ [F]_- * F(0) + [[F]_- * F]_- * F(0) + \ldots = m,$$

где m — математическое ожидание номера первой положительной суммы без единицы; конечность m доказана в статье Блэкуэлла [3]. Обозначив $H_-(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} e^{i x \lambda}\, dh(x)$ и перейдя в равенстве (4) к преобразованию Фурье, получим: $H(\lambda) + H_-(\lambda) = K(\lambda)(1 + H_-(\lambda))$, откуда

$$\frac{1 - K(\lambda)}{i\lambda} = \frac{1 - H(\lambda)}{i\lambda} \cdot \frac{1}{1 + H_-(\lambda)},$$

или

$$\frac{1 - K(\lambda)}{i\lambda} = -\frac{L(\lambda)}{1 + H_-(\lambda)}.$$

Докажем, что сомножители $L(\lambda)$ и $-[1 + H_-(\lambda)]^{-1}$ определяют факторизацию функции $[1 - K(\lambda)]/i\lambda$. Поскольку $L(\lambda)$ является характеристической функцией положительной случайной величины, то она допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость. Поскольку $H(\lambda)$ — характеристическая функция нерешетчатой случайной величины, то для $\operatorname{Im}\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ $L(\lambda) = [1 - H(\lambda)]/i\lambda \neq 0$; ввиду того, что $iH'(0) > 0$, также и $L(0) \neq 0$.

Для $\lambda = \sigma + i\rho$, $\rho > 0$,

$$|H(\lambda)| \leqslant \int_0^{\infty} e^{-\rho x}\, dh(x) < 1.$$

Следовательно, для $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ $L(\lambda) \neq 0$. Рассмотрев формулу (5) при $\lambda \to 0$, получим $1 + H_-(0)]^{-1} = iK'(0) = -\mathbf{M}\xi_k < 0$, откуда $H_-(0) < 1$. Но при $\lambda = \sigma + i\rho$, $\rho \leqslant 0$, $|H_-(\lambda)| \leqslant H_-(0)$; следовательно, в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$

$$0 < [1 + H_-(0)]^{-1} \leqslant |1 + H_-(\lambda)|^{-1} \leqslant [1 - H_-(0)]^{-1}.$$

Теорема доказана.

Важно выяснить условия, когда факторизация $[1 - K(\lambda)]/i\lambda = G_+(\lambda)\, G_-(\lambda)$ единственна с точностью до постоянных множителей вида $c^{\pm 1}$, поскольку в этих условиях $L(\lambda)$ однозначно определяется по формуле

$$L(\lambda) = \frac{G_+(\lambda)}{G_+(0)}.$$

Согласно [2] достаточно потребовать, чтобы для некоторого $N > 0$ $G_{\pm}^{\pm 1}(\lambda) = O(|\lambda|^N)$.

Если $\overline{\lim_{\substack{\lambda \to \infty, \\ \operatorname{Im}\lambda = 0}}} |1 - K(\lambda)| > 0$ (в частности, это выполняется, когда в распределении $F(x)$ имеется абсолютно непрерывная компонента), то данное соотношение очевидным образом выполняется при $N = 1$.

Отметим еще один случай. Соотношение $G_{\pm}^{\pm 1}(\lambda) = O(|\lambda|^N)$ имеет место и тогда, когда можно найти такие два различные x_1 и x_2, что $p_i = \mathbf{P}\{\eta = x_i\} > 0$, $i = 1, 2$, и $\vartheta = x_1/x_2$ является иррациональным алгебраическим числом.

Действительно, при этом условии и при $\lambda = \sigma + i\rho$, σ, $\rho \geqslant 0$, будем иметь:

$$|\lambda L(\lambda)| = |\lambda G_+(\lambda)| = |(\sigma + i\rho) G_+(\sigma + i\rho)| =$$

$$= |1 - K(\sigma + i\rho)| \geqslant \frac{1}{2} \max(p_1 |1 - e^{-\rho x_1 + i\sigma x_1}|^2,\ p_2 |1 - e^{-\rho x_2 + i\sigma x_2}|^2) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{8} \max(p_1 |1 - e^{i\sigma x_1}|^2,\ p_2 |1 - e^{i\sigma x_2}|^2) > C \max(|1 - e^{i\sigma x_1}|^2,\ |1 - e^{i\sigma x_2}|^2) =$$

$$= C [\max(|1 - e^{i\sigma x_1}|,\ |1 - e^{i\sigma x_2}|)]^2.$$

Выберем m из условия $m_i \leqslant \sigma x_i / 2\pi < m + 1$, $i = 1, 2$. Тогда $|1 - e^{i\sigma x_i}| \geqslant \frac{2}{\pi} \min(\sigma x_i - 2\pi m_i,\ 2\pi(m_i + 1) - \sigma x_i)$, откуда

$$\max(|1 - e^{i\sigma x_1}|,\ |1 - e^{i\sigma x_2}|) \geqslant C_1 \min_{\nu_i = 0,1} \left| \frac{m_1 + \nu_1}{x_1} - \frac{m_2 + \nu_2}{x_2} \right| \geqslant$$

$$\geqslant C_1 \frac{m_2}{x_2} \min_{\nu_i = 0,1} \left| \frac{m_1 + \nu_1}{m_2 + \nu_2} - \frac{x_1}{x_2} \right|.$$

По теореме Лиувилля [4] последнее выражение оценивается так:

$$C_1 \frac{m_2}{x_2} \min_{\nu_i = 0,1} \left| \frac{m_1 + \nu_1}{m_2 + \nu_2} - \frac{x_1}{x_2} \right| > C_2 m_2 \min_{\nu_2 = 0,1} (m_2 + \nu_2)^{-N} = C_2 m_2 (m_2 + 1)^{-N} > C_3 \sigma^{1-N},$$

$\sigma \geqslant h > 0$. Применяя полученную оценку при $\rho < k$ и неравенство $|1 - K(\sigma + i\rho)| \geqslant p |1 - e^{-hx_1}|$ при $\rho \geqslant k$, приходим к выводу, что $G_+^{-1}(\lambda) = O(|\lambda|^{2N-1})$; для $G_-(\lambda)$, по доказанному, имеем $0 < [1 + H_-(0)]^{-1} \leqslant |G_-(\lambda)| \leqslant [1 - H_-(0)]^{-1}$. Следовательно, и в этом случае $L(\lambda)$ однозначно определяется при помощи факторизации.

2°. Перейдем к случаю, когда величины ξ_k решетчатые. Без ограничения общности можно считать ξ_k целочисленными с максимальным шагом распределения, равным единице. Для решения задачи можно использовать понятие канонической факторизации функций на окружности ([2], стр. 35). Обозначим $K(\lambda) = M\lambda^{\xi_k}$. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 2.

I. *Если* $0 < M\xi_k < \infty$, *то предельное распределение* $\gamma_n(\xi_k)$ *при* $n \to \infty$ *существует.*

II. *Существует каноническая факторизация функции* $[1 - K(\lambda)]/(1 - \lambda) = G_+(\lambda) G_-(\lambda)$ *при этом* $G_+(\lambda)/G_+(0) = \lim_{n \to \infty} M\lambda^{\gamma_n(\xi_k)}$.

Доказательство аналогично нерешетчатому случаю.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В. С. Королюку за постановку задачи и руководство работой.

Поступила в редакцию
22.12.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Изв. АН СССР, серия матем. Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, 19, 4 (1955), 247—266.

[2] М. Г. Крейн, Успехи матем. наук, XIII, 5 (83) (1958).

[3] D. Blackwell, Pacif. Journ. Math., № 3 (1953), 315.

[4] А. Я. Хинчин, Цепные дроби, ГТТИ, 1957.

[5] А. А. Боровков, Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин, Теория вероят. и ее примен., V, 2 (1960). 137—171.

ON THE LIMIT DISTRIBUTION OF THE FIRST JUMP

I. N. KOVALENKO (KIEV)

(*Summary*)

Formulas are obtained for the limit distribution of the first jump over the level t when $t \to \infty$ for a sequence of identically distributed independent random variables with positive means. The cases of lattice as well as non-lattice distributions are discussed, seeing that the method of factorization [2] is used.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

С. М. ЕРМАКОВ, В. Г. ЗОЛОТУХИН

Метод Монте-Карло обладает большой общностью и может быть, вообще говоря, применен при решении широкого круга задач физики и прикладной математики.

Во многих случаях он, однако, уступает обычным численным методам ввиду плохой его сходимости.

Именно, если теоретическое среднее значение некоторой случайной величины θ получается приближенно, как результат N-кратной реализации соответствующего случайного процесса, то среднеквадратическая погрешность такого приближения есть $\frac{\mathbf{D}^2\theta}{N}$, где $\mathbf{D}^2\theta$ — дисперсия случайной величины θ. Из рассмотрения этой оценки следует, что необходимое число статистических испытаний N для получения заданной точности может быть уменьшено за счет уменьшения $\mathbf{D}^2\theta$. Естественно, поэтому, что способы уменьшения дисперсии заслуживают особого внимания. Существенные результаты в этом направлении были получены Гаммерсли и Мортоном [2], применившими метод корреляционной выборки к задаче вычисления определенных интегралов методом Монте-Карло. С самой общей точки зрения способ уменьшения $\mathbf{D}^2\theta$, предложенный Гаммерсли и Мортоном, заключается в построении случайной величины θ, близкой к постоянной, математическое ожидание которой было бы равно искомому значению определенного интеграла.

Эта общая идея применительно к задаче вычисления многократных интегралов методом Монте-Карло используется и в данной работе. В качестве такой случайной величины θ используется приближенное значение определенного интеграла

$$I = \int_D f(Q)\, dQ$$

по области D k-мерного Эвклидова пространства, получаемое посредством некоторой квадратурной формулы

$$\theta = \sum_{i=0}^{n} A_i f(\theta_i)$$

со специальной функцией $F(Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ плотности распределения случайных узлов Q_i. Использование такой неравномерно распределенной случайной величины θ позволяет значительно уменьшить дисперсию в особенности для случаев, когда подынтегральная функция $f(Q)$ обладает хорошими дифференциальными свойствами.

Будем предполагать, что $f(Q) \in L_D^2$ (пространство функций суммируемых с квадратом в области D k-мерного эвклидова пространства). Рассмотрим в L_D^2 набор $n+1$ линейно независимых функций. Их можно ортонормировать, и поэтому мы будем считать, что выбранные функции $\varphi_0(Q), \varphi_1(Q), \ldots, \varphi_n(Q)$ таковы, что

$$\int_D \varphi_i(Q)\,\varphi_j(Q)\, dQ = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j & i = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 1 \text{ при } i = j & j = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1}$$

Линейные комбинации функций $\varphi_i(Q)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ образуют конечно-мерное подпространство $L^2_{D,\,n+1}$ пространства L_D^2.

Для построения случайной величины θ мы будем использовать квадратурные формулы $\int_D \varphi_0(Q) f(Q)\, dQ \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(Q_i)$ с узлами в $n+1$ точке $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, $Q_i \in D$, точные для всякой функции f, которая принадлежит подпространству $L^2_{D,\,n+1}$.

Такая формула существует, если отличен от нуля определитель

$$w_{n+1}(Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = \det \| \varphi_0(Q_i), \varphi_1(Q_i), \ldots, \varphi_n(Q_i) \|_0^n$$

и в этом случае может быть записана следующим образом:

$$\int_D f(Q)\,\varphi_0(Q)\, dQ \approx \frac{\det \| f(Q_i), \varphi_1(Q_i), \ldots, \varphi_n(Q_i) \|_0^n}{w_{n+1}(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)}. \tag{2}$$

Обращение в нуль остатка этой формулы для случая $f(Q) \in L^2_{D,\,n+1}$ может быть легко проверено

Теперь мы можем сформулировать основные теоремы.

Теорема 1 *Если $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ случайные точки k-мерного эвклидова пространства, плотность вероятности которых $F(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ есть $\frac{1}{(n+1)!} w^2_{n+1}(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$, то математическое ожидание случайной величины*

$$\theta(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) = \frac{\det \| f(Q_i), \varphi_1(Q_i), \ldots, \varphi_n(Q_i) \|^n_0}{w_{n+1}(Q_0, \ldots, Q_n)}$$

равно $\int\limits_D f(Q)\varphi_0(Q)\,dQ$.

Доказательство.

$$\mathbf{M}\theta(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) = \underbrace{\int\limits_D dQ_0 \int\limits_D dQ_1 \ldots \int\limits_D dQ_n}_{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \det \| \varphi_0(Q_i), \varphi_1(Q_i), \ldots$$

$$\ldots, \varphi_n(Q_i) \|^n_0 \det \| f(Q_i), \varphi_1(Q_i), \ldots, \varphi_n(Q_i) \|^n_0.$$

Разлагая второй определитель в подынтегральном выражении по элементам первого столбца, легко видеть, что

$$\mathbf{M}\theta(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) = \frac{1}{n!} \underbrace{\int\limits_D dQ_0 \int\limits_D dQ_1 \ldots \int\limits_D dQ_n}_{n+1} f(Q_0) \times$$

$$\times \det \| \varphi_0(Q_i), \varphi_1(Q_i), \ldots, \varphi_n(Q_i) \|^n_0 \cdot \det \| \varphi_1(Q_i), \ldots, \varphi_n(Q_i) \|^n_1.$$

После разложения первого определителя в подынтегральном выражении по элементам первого столбца, получаем

$$\mathbf{M}\theta(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) = \int\limits_D f(Q_0)\varphi(Q_0)\,dQ_0 \cdot \frac{1}{n!} \underbrace{\int\limits_D dQ_1 \ldots \int\limits_D dQ_n}_{n} w^2_n(Q_1, Q_2, \ldots Q_n),$$

и для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\frac{1}{n!} \underbrace{\int\limits_D dQ_1 \ldots \int\limits_D dQ_n}_{n} w^2_n(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = 1.$$

Действительно, $w_n(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \varphi_n(Q_i)\, w_{n-1}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \ldots$
$\ldots, Q_n)$ и в силу ортогональности $\varphi_n(Q_i)$ к любому $w_{n-1}(Q_1, \ldots, Q_{j-1}, Q_{j+1}, \ldots, Q_n)$ $(i \neq j)$

$$\underbrace{\int\limits_D dQ_1 \ldots \int\limits_D dQ_n}_{n} w^2_n(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = n \underbrace{\int\limits_D dQ_2 \ldots \int\limits_D dQ_n}_{n-1} w^2_{n-1}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \ldots$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Теперь необходимо рассмотреть вопрос об уменьшении дисперсии случайной величины θ по сравнению с обычным методом Монте-Карло. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2. *Дисперсия случайной величины* $\theta(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$

$$D^2\theta(Q_0, \ldots, Q_n) = \int_D f^2(Q)\,dQ - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2,$$

где $\alpha_i = \int_D f(Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ$ $\qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$

Доказательство состоит в непосредственном вычислении

$$D^2\theta(Q_0, \ldots, Q_n) = \underbrace{\int_D dQ_0 \int_D dQ_1 \ldots \int_D dQ_n}_{n+1} (\det \| f(Q_i), \varphi_1(Q_i), \ldots, \varphi_n(Q_i) \|_0^n)^2 \frac{1}{(n+1)!} -$$

$$- \left[\int_D f(Q)\,\varphi_0(Q)\,dQ\right]^2 = D_{n+1} - \alpha_0^2.$$

Разлагая определитель по элементам последнего столбца, получаем

$$D_{n+1} = D_n - \int_D dQ_0 \ldots \int_D dQ_n \frac{1}{(n-1)!} \det \| f(Q_i), \varphi_1(Q_i), \ldots$$

$$\ldots, \varphi_{n-1}(Q_i) \|_{i+1} \det \| f(Q_i), \varphi_1(Q_i), \ldots, \varphi_{n-1}(Q_i) \|_{i \neq 0}.$$

После разложения обоих определителей по элементам первой строки и интегрирования с учетом ортогональности φ_i получаем

$$D_{n+1} - D_n = \left[\int_D f(Q_0)\,\varphi_n(Q_0)\,dQ_0\right]^2 \cdot \frac{1}{(n-1)!} \underbrace{\int_D dQ_2 \ldots \int_D}_{n+1} dQ_n w_{n-1}^2(Q_2, Q_3, \ldots, Q_n),$$

т. е. $D_{n+1} = D_n - \alpha_n C_{n-1}$, где $C_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \underbrace{\int_D \ldots \int_D}_{n-1} w_{n-1}^2(Q_2 \ldots Q_n)\,dQ_2 \ldots dQ_n$.

Постоянная $C_{n-1} = 1$, как было показано при доказательстве теоремы 1. Если далее учесть, что

$$D_0 = \int_D f^2(Q)\,dQ,$$

то теорема доказана.

Таким образом, изложенный метод является обобщением обычного метода Монте-Карло и включает последний в качестве частного случая при $n = 0$.

Выражение для $D^2\theta$ показывает, что наибольшую пользу применение этого метода может дать, если ряд Фурье $f(Q)$ по соответствующей ортогональной системе быстро сходится в среднем к $f(Q)$.

Теоремы 1 и 2 указывают на связь точечного интерполирования, разложения в ряд Фурье по ортонормированной системе и метода Монте-Карло.

Так, если в качестве ортонормированной системы φ_i взять полиномы Лежандра степени i, то квадратурная формула (2) оказывается обычной интерполяционной квадратурной формулой, а $D^2\theta$ есть интеграл от квадрата остатка разложения $f(Q)$ в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Аналогичная связь устанавливается между тригонометрическим интерполированием и разложением в ряд Фурье по тригонометрическим функциям.

Интересен и тот факт, что в качестве $\varphi_0(Q)$ может быть выбрана знакопеременная функция, что может оказаться полезным при вычислении интегралов от быстроколеблющихся функций.

Практическая реализация выборки из распределения, задаваемого функцией $F(Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ может быть осуществлена посредством использования условных вероятностей [1]. Как обычно равномерное распределение и здесь является исходным. Методы

получения псевдо-случайных чисел [3] для автоматических вычислений оказываются полезными при реализации этого распределения. Необходимость вычисления интерполяционных коэффициентов оправдывается большим выигрышем в точности, в особенности, если вычисление самой функции $f(Q)$ требует затраты большого вычислительного труда.

Авторы пользуются случаем поблагодарить Марчука Г. И. и Соболя И. М. за внимание к данной работе.

Поступила в редакцию
14.7.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Крамер, Математические методы статистики, ГИИЛ, М., 1948.
[2] I. M. Hammersley and K. W. Morton, A new Monte-Carlo technique, antithetic variates, Proc. Camb. Phil. Soc., 52 (1956), 149.
[3] И. М. Соболь, Псевдослучайные числа для машины «Стрела», Теория вероят. и ее примен., III, 2 (1958), 205—211.

POLYNOMIAL APPROXIMATIONS AND THE MONTE-CARLO METHOD

S. M. ERMAKOV and V. G. ZOLOTUHIN (MOSCOW)

(*Summary*)

A new method of computing multiple integrals is proposed, which is a generalization of the ordinary Monte-Carlo method.

This new method in evaluating the integral makes use of its approximate value as obtained by formulas for mechanical quadratures in accordance with a special distribution law for the integrational points.

It is shown that the standard deviation of the estimation may be considerably decreased, especially when the integrand possesses good differential properties.

В РЕДАКЦИЮ ЖУРНАЛА «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ»

Правление Московского Математического общества сообщает об организации секции теории вероятностей и математической статистики.

В члены секции принимаются лица, ведущие научную работу в области теории вероятностей и математической статистики и их применений.

С заявлениями о желании вступить в секцию просьба обращаться по адресу: Москва, В—234, МГУ, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей. Синаю Я. Г.

СОДЕРЖАНИЕ ПЯТОГО ТОМА

Выпуск первый

Александр Яковлевич Хинчин 3
Гирсанов И. В Сильно-феллеровские процессы. I. Общие свойства 7
Girsanov I. V. Fellersche Processes. I. Allgemeine Eigenschaften 28
Добрушин Р. Л. Предельный переход под знаками информации и энтропии . . 29
Dobrushin R. L. Limit Approach under the Signs of Information and Entropy . 37
Матвеев Р. Ф. О сингулярных многомерных стационарных процессах . . . 38
Matveev P. F. Sur les Procesus Singulare Vectorielles Stationnaires . . . 44
Скороход А. В. О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. II. Марковские процессы 45
Skorochod A. V. On Differentiability of Measures Which Correspond to Markov Processes 53
Маслов К. В. О некоторых предельных теоремах теории вероятностей . . . 54
Maslov K. V. On Certain Limit Theorems in Probability Theory 83
Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Квазимоментные функции в теории случайных процессов 84
Kuznetsov P. I., Stratonovich R. L., Tihonov V. I. Quasimoment Functions in Stochastic Processes Theory 102

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Прохоров Ю. В. О равномерной предельной теореме А. Н. Колмогорова . . . 103
Prohorov Yu. V. On a Uniform Limit Theorem of A. N. Kolmogorov 113
Мешалкин Л. Д. О приближении неограниченно-делимыми законами полиномиальных распределений 114
Meshalkin L. D. On Approximation of a Multinomial Distribution by Infinitely Divisible Laws 124
Рогозин Б. А. Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме» 125
Rogozin B. A. Remark on the Paper «A Moment Inequality with an Application to the Central Limit Theorem» by C. G. Esseen 128
Беляев Ю. К. Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов 128
Beljaev Yu. K. Local Properties of the Sample Functions of Stationary Gaussian Processes 131
Добрушин Р. Л. Свойства выборочных функций гауссовского стационарного процесса 132
Dobrushin R. L. Properties of Sample Functions of Stationary Gaussian Process 134
Информация о втором совещании по применению математических методов в биологии 134

Выпуск второй

Боровков А. А. Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. I 137
Borovkov A. A. Limit Theorems on the Distributions of Maximum of Sums of Bounded Latticed Random Variables. I. 171

Стратонович Р. Л. Условные процессы Маркова 172
Stratonovich R. L. Conditional Markov Processes 195
Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений . 196
Hasminsky R. Z. Ergodic Properties of Recurrent Diffusion Processes and Stabilization of the Solution to the Cauchy Problem for Parabolic Equations 214
Колмогоров А. Н., Сарманов О. В. О работах С. Н. Бернштейна по теории вероятностей (к восьмидесятилетию со дня рождения) 215

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Колмогоров А. Н., Розанов Ю. А. Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса 222
Kolmogorov A. N., Rozanov Yu. A. On a Strong Mixing Condition for Stationary Random Gaussian Process 227
Лян Чжи-шуэн. Об условных марковских процессах 227
C. S. Leung. On Conditional Markov Processes 228
Черкасов И. Д. Признак однородности по координатам непрерывного процесса Маркова 229
Cherkasov I. D. Criteria for Coordinate Homogeneity for Continuous Markov Process 237
Юшкевич А. А. К определению строго марковского процесса 237
Yushkevič A. A. On the Definition of a Strong Markov Process 243
Розанов Ю. А. О центральной предельной теореме для аддитивных случайных функций 243
Rozanov Yu. A. A Central Limit Theorem for Additive Random Functions . 246
Башарин Г. П. О предельном распределении времени занятости полнодоступного пучка линий 246
Basharin G. P. The Congestion Limit Distribution for a Fully Available Group of Trunks 252
Информация о совещании по предельным теоремам теории вероятностей . . 253

Выпуск третий

Яглом А. М. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром . . 265
Yaglom A. M. Effective Solutions of Linear Approximation Problems for Multivariate Stationary Processes with a Rational Spectrum 292
Ширяев А. Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. I . 293
Shiryaev A. N. Some Problems in the Spectral Theory of Higher-Order Moments. I 313
Гирсанов И. В. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры 314
Girsanov I. V. On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures 330

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Whittle P. Bounds for the Moments of Linear and Quadratic Forms in Independent Variables 331
Уиттл П. Оценки моментов линейных и квадратичных форм независимых случайных величин 335
Синай Я. Г. Динамические системы и стационарные марковские процессы . . 335
Sinay Ya. G. Dynamical Systems and Stationary Markov Processes . . . 338
Волков И. С. О вероятностях крайних значений сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний . . . 338
Volkov I. S. On Probabilities for Extreme Values of Sums of Random Variables Defined on a Homogeneous Markov Chain with a Finite Number of States 352

Иванов В. А. О среднем числе пересечений некоторого уровня выборочными функциями вероятностного процесса 352
Ivanov V. A. On the Average Number of Intersections of a Level by the Sample Functions of a Stochastic Process 357
Волконский В. А. Эргодическая теорема для распределения длины выброса . 360
Volkonski V. A. An Ergodic Theorem on the Distribution of the Duration of Fades 361
Соболь И. М. О решении интегрального уравнения Пайерлса методом Монте-Карло 366
Sobol I. M. On the Solution of Peierls' Integral Equation by the Monte Carlo Method 367
Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара кафедры теории вероятностей Московского университета (октябрь — декабрь 1959 г.) . . . 367

Выпуск четвертый

Боровков А. А. Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. II 377
Borovkov A. A. Limit Theorems on the Distributions of Maximum of Sums of Bounded Latticed Random Variables. II. 392
Darling D. A. Sur les Theorémes de Kolmogorov — Smirnov 393
Дарлинг Д. А. К теоремам Колмогорова — Смирнова 398
Розанов Ю. А. Спектральные свойства многомерных стационарных процессов и граничные свойства аналитических матриц 399
Rozanov Yu. A. Spectral Properties of Multivariate Stationary Processes and Boundary Properties of Analytic Matrices 414
Аров Д. З., Бобров А. А. О крайних членах вариационного ряда и их роли в сумме независимых величин 415
Arov D. Z., Bobrov A. A. The Extreme Members of Sample and Their Role in the Sum of the Independent Values 434
О работах Н. В. Смирнова по математической статистике (к шестидесятилетию со дня рождения) 433

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Дынкин Е. Б. Аддитивные функционалы от винеровского процесса, определяемые стохастическими интегралами 441
Dynkin E. B. Additive Functionals of a Wiener Process Determined by Stochastic Integrals 452
Большев Л. Н. Об оценках вероятностей 453
Bolshev L. N. On Estimates of Probabilities 457
Воробьев Н. Н. О расчлененных стратегиях 457
Vorobjev N. N. On Dismembered Strategies 459
Леонов В. П., Ширяев А. Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. II 460
Leonov V. P., Shiryaev A. N. Some Problems in the Spectral Theory of Higner-Order Moments. II 464
Студнев Ю. П. К вопросу о приближении распределений сумм неограниченно-делимыми законами 465
Studnev Yu. P. An Approximation to the Distribution of Sums by Infinitely Decomposable Laws 469
Коваленко И. Н. О предельном распределении величины первого перескока . 469
Kovalenko I. N. On the Limiting Distribution of the First Jump 472
Ермаков С. М., Золотухин В. Г. Полиномиальные приближения и метод Монте-Карло 473
Ermakov S. M., Zolotukhin V. G. Polynomial Approximations and the Monte Carlo Method 476
Письмо в редакцию 476

Опечатки и исправления

В резюме доклада В. В. Петрова «Асимптотические разложения, связанные с суммами независимых случайных величин» (т. IV, вып. 4)

На стр. 474 вместо $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{s_n^2}{n}>0$ должно быть $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{s_n^2}{n}>0$. На стр. 475 в четвертой строке сверху вместо $5\lambda_{3n}^3$ должно быть $5\lambda_{3n}^2$; там же в шестой строке сверху вместо $o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ должно быть $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

В резюме доклада Л. Н. Большева «Обзор некоторых результатов, полученных в дипломных работах по математической статистике» (т. V, вып. 3)

На стр. 368 в последней строке следует заменить $\mathbf{E}$ на Ξ и a на α.

На стр. 370 в 8-й строке сверху следует читать: 1) когда L состоит из двух точек. В формулировке теоремы на той же странице должно быть написано $\mathbf{P}\{U\geqslant u\}$.

В статье А. Н. Ширяева «Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. I» (т. V, вып. 3).

На стр. 298 в формуле (1.11) вместо $(-1)^m$ должно быть $(-1)^{m-1}$.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Т. А. Михайлова*

Т-12393 Подписано к печати 1/XI-1960 г. Тираж 2285 экз. Зак. 3486
Формат бум. 70×108¹/₁₆ Печ. л. 8,90+1 вкл. Бум. л. 3¹/₄ Уч.-изд. л. 9,2

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

Цена 11 р. 25 к.